Cours de Math IV Algèbre

(R. Bahloul, 2^{e} semestre 2009/2010)

Les livres utilisés lors de la préparation de ce cours furent les suivants.

Références

[1] Joseph Grifone, Algèbre linéaire, 2^e^ édition, cépaduès éditions.

[2] X. Gourdon, Les Maths en tête - Algèbre (ellipses).

[3] René Deheuvels, formes quadratiques et groupes classiques, puf.

Table des matières

1. Espace vectoriel quotient

La notion d'espace vectoriel quotient est à rapprochée de ce qui est connu concernant $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$. L'idée dans les deux cas est de travailler modulo un sous objet (sous-groupe (ou idéal) dans un cas, sous-espace vectoriel dans l'autre).

1.1. Notions préliminaires - Rappels.

Définition 1.1.1. *Rappelons qu'une relation d'équivalence $\sim$ sur un ensemble A est une relation binaire sur A satisfaisant aux trois propriétés suivantes :*
- *Réflexivité : $\forall x \in A, x \sim x$*
- *Symétrie : $\forall x, y \in A$, si $x \sim y$ alors $y \sim x$*
- *Transitivité : $\forall x, y, z \in A$, si $x \sim y$ et $y \sim z$ alors $x \sim z$.*

Définition 1.1.2. *Soit $\sim$ une relation d'équivalence sur un ensemble A.*
- *Pour $x \in A$, on note $\bar{x} = \{y \in A | x \sim y\}$. On l'appelle la classe d'équivalence de A. (Il s'agit donc d'un sous-ensemble de A.)*
- *On définit l'espace quotient $A/\sim$ de A par $\sim$ comme l'ensemble $\{\bar{x} | x \in A\}$. Il s'agit donc d'un sous-ensemble de $\mathcal{P}(A)$.*
- *Soit $X \in A/\sim$. Un élément x de X est appelé un représentant de (la classe) X.*

Proposition 1.1.3. *Soit A un ensemble.*

1. *Soit $\sim$ une relation d'équivalence sur A. Alors A la réunion disjointe des classes d'équivalences (autrement dit, les classes d'équivalence forment une partition de A).*
2. *Soit $A = \bigcup_{i \in I} X_i$ une partition quelconque de A. Définissons la relation binaire suivante. Pour $x, y \in A$, $x \sim y \iff \exists i \in I, \{x, y\} \subset X_i$. Alors $\sim$ est une relation d'équivalence.*

La preuve est laissée en exercice.

On peut traduire cette proposition comme suit : se donner une relation d'équivalence ou se donner une partition sont deux choses équivalentes.

Supposons maintenant que sur A il y ait une loi interne qu'on note $*$ et une structure externe sur (par exemple) un corps $\mathbf{k}$ qu'on note $\lambda \cdot x$.

On dit que les lois sont compatibles avec la relation $\sim$ si les propriétés suivantes sont satisfaites.
- Pour $x, x', y, y' \in A$, si $x \sim x'$ et $y \sim y'$ alors $x * y \sim x' * y'$.
- Pour $x, x' \in A$ et pour $\lambda \in \mathbf{k}$, si $x \sim x'$ alors $\lambda \cdot x \sim \lambda \cdot x'$.

L'espace quotient $A/\sim$ de A par la relation $\sim$ est alors susceptible d'être muni des mêmes lois que A avec les mêmes propriétés (associativité, commutativité, etc). En effet, soient X et Y deux élements de $E/\sim$. On a envie de poser : $X * Y = \overline{x * y}$ où x est un représentant quelconque de X (i.e. $x \in X$) et y un représentant quelconque de Y. La définition n'est valide que si elle ne dépend pas du choix des représentants x et y. Autrement dit, si on avait fait un autre choix x' pour représenter X et un autre choix y' pour représenter Y, on devrait pouvoir poser $X * Y = \overline{x' * y'}$; et c'est le cas si la relation $\sim$ est compatible avec la loi $*$.

De même, on veut poser $\lambda \cdot X = \overline{\lambda \cdot x}$ et cette définition est légitime si la loi externe est compatible avec la relation $\sim$.

Un exemple connu d'une telle situation :

Exemple 1.1.4. *Soit* $A = \mathbf{Z}$. *Soit* $n \in \mathbf{Z}$. *On définit* $\sim$ *de la façon suivante :* $a \sim b \iff a - b \in n\mathbf{Z}$. *Cette relation est une relation d'équivalence (<u>exercice</u>). L'ensemble quotient obtenu* $A/\sim$ *est noté* $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$.

L'ensemble A *est muni de deux opérations internes* $+$ *et* $\times$. *Ces opérations sont compatibles avec* $\sim$ *(<u>exercice</u>). On démontre alors que* $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ *est un anneau comme l'est* $\mathbf{Z}$.

1.2. **Définition d'un espace vectoriel quotient.** Soit $(E, +, \cdot, \mathbf{k})$ un espace vectoriel et F un sous-espace vectoriel de E. On va définir le quotient de E par F.

Définition 1.2.1.

(1) *On définit une relation binaire sur* E *(qui dépend de* F*) : pour* $x, y \in E$, $x \sim y \iff x - y \in F$.
<u>Exercice</u> : c'est une relation d'équivalence.

(2) *On appelle espace quotient de* E *par* F *l'ensemble quotient* $E/\sim$ *et on le note* E/F.

(3) *Pour* $x \in E$, *on note* $\bar{x}$ *la classe de* x *dans ce quotient. On dit aussi classe de* x *modulo* F.

Proposition 1.2.2. *Pour* $x \in E$, *on a*

$$\bar{x} = x + F := \{x + y | y \in F\}$$

Démonstration.
$\subset$: Soit $x' \in \bar{x}$ alors $x - x' \in F$ d'où $x' \in x + F$.
$\supset$: Soit $x' \in x + F$. Alors il existe $y \in F$ tel que $x' = x + y$. Par conséquent, $x' - x = y \in F$. Ainsi $x \sim x'$, i.e. $\bar{x'} = \bar{x}$ ou encore $x' \in \bar{x}$

□

Ainsi, l'ensemble E/F n'est rien d'autre que l'ensemble des $x + F$ avec $x \in E$, i.e. c'est l'ensemble de tous les “translatés” de F.

Remarque 1.2.3. *Pour* $x \in E$, *on a :* $x \in F \iff \bar{x} = \bar{0}$

Démonstration. En <u>exercice</u>. □

Pour le moment E/F n'est rien d'autre qu'un ensemble.

Proposition 1.2.4. *Les opérations* $+$ *et* $\cdot$ *sont compatibles avec la relation d'équivalence.*

Démonstration. Soient $x, x', y, y' \in E$ tels que $x \sim x'$ et $y \sim y'$. Soit $\lambda \in \mathbf{k}$. On doit montrer que $x + y \sim x' + y'$ et $\lambda \cdot x \sim \lambda \cdot x'$.

Par hypothèse, $x - x' \in F$ et $y - y' \in F$, i.e. il existe $x'', y'' \in F$ tels que $x - x' = x''$ et $y - y' = y''$. Par conséquent $(x + y) - (x' + y') = (x - x') + (y - y') = x'' + y'' \in F$ ce qui montre bien que $x + y \sim x' + y'$

Concernant le produit, on a : $\lambda x - \lambda x' = \lambda(x - x') = \lambda x'' \in F$. Ainsi $\lambda x \sim \lambda x'$ □

Grâce à cette proposition, on peut définir deux opérations : $+$ et $\cdot$ sur E/F.

Définition 1.2.5. *Soient* $X, Y \in E/F$ *et* $\lambda \in \mathbf{k}$. *Soient* $x \in X$ *(i.e.* x *un représentant de* X*) et* $y \in Y$ *(i.e* y *est un représentant de* Y*). On pose alors* $X + Y = \overline{x + y}$ *et* $\lambda \cdot X = \overline{\lambda \cdot x}$.

Par la proposition précédente, ces définitions ne dépendent pas des représentants choisis.

Comme conséquence directe de cette définition et de la proposition précédente, nous obtenons :

Proposition 1.2.6. *Soient* $x, y \in E$ *et* $\lambda \in \mathbf{k}$*. Alors* $\bar{x} + \bar{y} = \overline{x + y}$ *et* $\lambda \cdot \bar{x} = \overline{\lambda \cdot x}$*.*

Démonstration. En effet, soit $X = \bar{x}$ et $Y = \bar{y}$ Alors x et y sont des représentants respectifs de X et Y d'où $\bar{x} + \bar{y} = X + Y = \overline{x + y}$. On fait de même pour le produit (exercice). □

Proposition 1.2.7. *L'ensemble* E/F *muni de* $+$ *et* $\cdot$ *est un espace vectoriel sur* $\mathbf{k}$*.*

Démonstration. En exercice. Il s'agit de vérifier que E/F satisfait bien aux axiomes d'un espaces vectoriel. C'est un peu long mais cela ne pose pas de difficultés. □

Exemple 1.2.8. *Voici deux exemples "triviaux". Soit* E *un espace vectoriel quelconque.*

(1) *L'espace* E/E *est isomorphe à* (0)*. (En fait on a même une égalité :* $E/E = \{\bar{0}\}$*).*

(2) *L'espace* $E/(0)$ *est isomorphe à* E*.*

Démonstration. Exercice □

Proposition 1.2.9. *L'application* $\pi : E \to E/F$ *donnée par* $\pi(x) = \bar{x}$ *est linéaire et surjective. De plus,* $\ker(\pi) = F$*. On appelle* π *la surjection canonique de* E *vers* E/F*.*

Démonstration. Soient $x, y \in E$ et $\lambda \in \mathbf{k}$. On a $\pi(\lambda \cdot x + y) = \overline{\lambda \cdot x + y} = \lambda \cdot \bar{x} + \bar{y}$ par la proposition 1.2.6. On obtient finalement $\lambda \cdot \pi(x) + \pi(y)$. Ceci montre la linéarité. La surjectivité est triviale car tout élément de E/F est par définition la classe d'un certain $x \in E$. Concernant le noyau, $\ker(\pi) = \{x \in E | \pi(x) = 0_{E/F}\} = \{x \in E | \bar{x} = \bar{0}\} = F$ par la remarque 1.2.3. □

1.3. **Codimension.**

Définition 1.3.1. *Soit* E *un* $\mathbf{k}$*-espace vectoriel et* F *un s.e.v. de* E*.*

- *On appelle codimension de* F *dans* E*, et on la note* $\mathrm{codim}_E(F)$*, la dimension de* E/F*.*
- *Si* $\mathrm{codim}_E(F) = 1$ *on dit que* F *est un hyperplan de* E*.*

Proposition 1.3.2. *Soit* F *un s.e.v. d'un* $\mathbf{k}$*-espace vectoriel* E*. Soit* S *un supplémentaire de* F *dans* E*. Alors l'application* $(S \to E/F, s \mapsto \bar{s})$ *est un isomorphisme linéaire.*

Corollaire 1.3.3.
- $\dim(S) = \mathrm{codim}_E(F)$*.*
- *Si* $\dim(E) < +\infty$ *alors* $\mathrm{codim}_E(F) = \dim(E) - \dim(F)$*.*

La preuve de ce corollaire est triviale. Démontrons la proposition.

Démonstration de la proposition. Notons p l'application en question. Alors p est la restriction de π à S, d'où en particulier la linéarité de p.

Montrons qu'elle est injective. Soit pour cela $s \in S$ tel que $p(s) = 0$, i.e. $\bar{s} = 0$. Alors $s \in S \cap F$ or F et S sont en somme directe donc $S \cap F = \{0\}$ d'où $s = 0$ et p est injective.

Montrons la surjectivité de p. Soit $\bar{x} \in E/F$ avec $x \in E$. On veut trouver $s \in S$ tel que $p(s) = \bar{s} = \bar{x}$. On a par hypothèse $E = S \oplus F$. Par conséquent il existe $(s, f) \in S \times F$ tel que $x = s + f$. Ainsi $x - s = f \in F$ i.e. $\bar{x} = \bar{s}$. $\square$

Remarque 1.3.4. *Cette proposition et sa preuve permettent dans la pratique de trouver une base d'un espace quotient. En effet, il suffit de donner une base* $\{s_1, \ldots, s_p\}$ *de* S *pour obtenir une base* $\{\overline{s_1}, \ldots, \overline{s_p}\}$ *de* E/F. *En exercice, démontrez ce fait.*

1.4. **Application quotient.**

Proposition 1.4.1. *Soit* $f : E \to E'$ *une application linéaire entre deux* **k***-espaces vectoriels. Alors il existe un isomorphisme canonique* $\bar{f} : E/\ker(f) \to \operatorname{Im}(f)$.

Démonstration. On définit $\bar{f}$: pour $\bar{x} \in E/\ker(f)$ on pose $\bar{f}(\bar{x}) = f(x)$. Il faut commencer par montrer que ceci est bien défini, autrement dit que la définition de $\bar{f}$ ne dépend pas du choix d'un représentant.

En effet si y est un autre représentant de $\bar{x}$ alors $\bar{x} = \bar{y}$ i.e. $x - y \in \ker(f)$ d'où $f(x - y) = 0$ puis par linéarité de f, $f(x) - f(y) = 0$, i.e. $f(x) = f(y)$.

Montrons que $\bar{f}$ est injective. Soit $\bar{x} \in E/\ker(f)$ tel que $\bar{f}(\bar{x}) = 0$ (i.e. $\bar{x}$ est dans la noyau de $\bar{f}$). Alors $f(x) = 0$ d'où $x \in \ker(f)$ d'où $\bar{x} = \bar{0}$ d'où l'injectivité.

Montrons pour finir la surjectivité. Soit $y \in \operatorname{Im}(f)$. Alors il existe $x \in E$ tel que $f(x) = y$. Par suite $\bar{f}(\bar{x}) = f(x) = y$ ce qui montre la surjectivité. $\square$

Corollaire 1.4.2. *Si* $f : E \to E'$ *est linéaire et* $\dim(E) < +\infty$ *alors* $\dim(E) = \operatorname{rg}(f) + \dim(\ker(f))$.

Autrement dit on retrouve le théorème du rang.

Démonstration. Par la proposition précédente et le corollaire 1.3.3, on a : $\dim(E/\ker(f)) = \dim(E) - \dim(\ker(f)) = \dim(\operatorname{Im}(f))$. $\square$

2. Dualité

2.1. **Introduction.** Dans $\mathbb{R}^n$, il y a deux façons naturelles de définir un sous-espace vectoriel : en donnant une famille de vecteurs génératrice ou bien en donnant un système d'équations linéaire.

On peut se poser une première question : comment passer d'une description à l'autre ? Comment, étant donné une famille génératrice, construire un système d'équation (si possible de cardinal minimal) dont l'ensemble des solution est l'espace engendré par la famille de départ ? De même, étant donné un système d'équations linéaires, comment construire une famille génératrice (de cardinal minimal si possible, donc une base) de l'espace des solutions ? (On est plus habitué à repondre à cette dernière question qu'à la précédente.)

Dans $E = \mathbb{R}^5$, considérons le sous-espace vectoriel suivant :
$F = \mathrm{Vect}\{(2,-1,1,-1,2),(-2,4,-1,1,-3),(2,2,1,-1,1)\}$. On aimerait trouver un système d'équations linéaires dont l'ensemble des solutions est F. Notons v_1, v_2 et v_3 les vecteurs ci-dessus.

On considère des équations du type : $ax + by + cz + dt + eu = 0$ où a, b, c, d, e sont des coefficients à trouver. Les coordonnées des vecteurs v_i doivent satisfaire les équations. On a donc

$$\left\{\begin{array}{rcl} 2a - b + c - d + 2e & = & 0 \\ -2a + 4b - c + d - 3e & = & 0 \\ 2a + 2b + c - d + e & = & 0 \end{array}\right.$$

On conserve la seconde équation E_2 ; on remplace la première E_1 par $E_1 + E_2$; on remplace la troisième E_3 par $E_3 + E_2$. On obtient

$$\left\{\begin{array}{cccccrcl} & 3b & & & -e & = & 0 \\ -2a & +4b & -c & +d & -3e & = & 0 \\ & 6b & & & -2e & = & 0 \end{array}\right.$$

Ainsi ce système peut s'écrire :

$$\left\{\begin{array}{rcl} e & = & 3b \\ d - 3e & = & 2a - 4b + c \end{array}\right.$$

Cela montre que le système précédent est de rang 2. Par le théorème du rang, l'espace des solutions est de dimension 3. Ainsi, si on trouve trois vecteurs linéairement indépendants dans l'espace des solutions, ils en formeront une base. Donnons des valeurs particulières à (a, b, c) ce qui fixera (d, e) : $(a, b, c) = (1, 0, 0)$ donne $d = 2$, $e = 0$; $(a, b, c) = (0, 1, 0)$ donne $d = 5$, $e = 3$; $(a, b, c) = (0, 0, 1)$ donne $d = 1$, $e = 0$. Ainsi les vecteurs $w_1 = (1, 0, 0, 2, 0)$, $w_2 = (0, 1, 0, 5, 3)$ et $w_3 = (0, 0, 1, 1, 0)$ forment une base de l'espace des solutions.

Nous obtenons donc un système de trois équations linéairement indépendantes :

$$(S) \quad \left\{\begin{array}{ccccccc} x & & & +2t & & = & 0 \\ & y & & +5t & +3u & = & 0 \\ & & z & +t & & = & 0 \end{array}\right.$$

Notons F' l'espace solutions de ce système (S). Ce système étant de rang 3, la dimension de F' est donc 2. On vérifie facilement que les coordonnées de v_1, v_2 et v_3 sont solutions de ce système ce qui montre que $F \subset F'$. On remarque de plus que F est de dimension au moins 2 (car par exemple v_1 et v_2 ne sont pas colinéaires) d'où l'égalité $F = F'$ (en passant, on remarque que $v_3 = 2v_1 + v_2$). Autrement dit (S) est un système dont l'espace solution est bien F.

Notons $W_1 : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}$ l'application qui envoie (x, y, z, t, u) sur $x + 2t$. On pose de même $W_2(x, y, z, t, u) = y + 5t + 3u$ et $W_3(x, y, z, t, u) = z + t$. Ce sont trois applications linéaires. On peut dire, dans un certain sens que F est l'annulateur de $\{W_1, W_2, W_3\}$ et même de $\mathrm{Vect}\{W_1, W_2, W_3\}$.

L'idée du chapitre est de définir un espace et de donner un cadre dans lequel on pourra généraliser la situation précédente à tout espace E (et pas seulement du type $\mathbb{R}^n$).

2.2. **Définition du dual et premiers résultats.**

Définition 2.2.1. *Soit E un espace vectoriel sur un corps $\mathbf{k}$.*

(1) *On appelle forme linéaire sur E toute application linéaire de E vers $\mathbf{k}$ ($\mathbf{k}$ étant considéré comme espace vectoriel sur lui-même).*

(2) *On appelle espace dual de E, et on le note E^*, l'ensemble des formes linéaire sur E.*

Remarque 2.2.2.

– $E^* = \mathcal{L}_{\mathbf{k}}(E, \mathbf{k})$ *(on note aussi* $\mathrm{Hom}_{\mathbf{k}}(E, \mathbf{k})$*).*

– E^* *est un espace vectoriel sur* $\mathbf{k}$ *(exercice).*

Lemme 2.2.3. *Soient E, F deux espaces vectoriels sur $\mathbf{k}$ de dimension respective n et m. Alors la dimension de $\mathcal{L}_{\mathbf{k}}(E, F)$ est $n \cdot m$.*

Démonstration. Notons $\mathcal{M} = \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbf{k})$ l'espace vectoriel des matrices à m lignes et n colonnes à coefficients dans $\mathbf{k}$. Il est connu que cet espace est de dimension nm (en effet une base naturelle de $\mathcal{M}$ est l'ensembles des matrices élémentaires $E_{i,j}$. La matrice $E_{i,j}$ a tous ses coefficients nuls sauf celui d'indice (i, j) qui vaut 1). Notons $\mathcal{B}_E$ et $\mathcal{B}_F$ deux bases quelconques de E et F. Considérons alors l'application $\psi : \mathcal{L}_{\mathbf{k}}(E, F) \to \mathcal{M}$ qui envoie u sur la matrice de u relativement à $\mathcal{B}_E$ et $\mathcal{B}_F$.

Montrons que ψ est linéaire et bijective pour conclure. La linéarité est laissée en exercice. Montrons que ψ est injective. Soit $u \in \ker(\psi)$. Soit $M = \mathrm{Mat}(u, \mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F)$ qui par hypothèse est nulle.

Notons $\mathcal{B}_E = (e_1, \ldots, e_n)$ et $\mathcal{B}_F = (f_1, \ldots, f_m)$. Par définition de M, sa i-ième colonne est constituée des coordonnées de $u(e_i)$ dans la base $\mathcal{B}_F$. Ainsi $u(e_i) = 0$ pour tout i. Par linéarité de u, cela implique u est nulle d'où l'injectivité voulue.

Montrons la surjectivité. Soit $M = (m_{ij})$ une matrice de taille $m \times n$ à coefficients dans $\mathbf{k}$. Nous devons lui trouver un antécédent u. Soit $u : E \to F$ définie ainsi : pour tout $\mu_1, \ldots, \mu_n \in \mathbf{k}$,

$$u(\mu_1 e_1 + \cdots + \mu_n e_n) = \sum_{j=1}^{n} \mu_j \cdot (\sum_{i=1}^{m} m_{ij} f_i).$$

Puisqu'un vecteur de E sécrit de façon unique comme combinaison linéaire des e_i, cela définit bien une application u de E vers F. On vérifie facilement qu'elle est linéaire. Notons $A = \mathrm{Mat}(u, \mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F) = \psi(u)$. Pour tout $j = 1, \ldots, n$, la j-ième colonne de A est, par définition, constituée des coordonnées de $u(e_j)$ dans la $\mathcal{B}_F$. Or $u(e_j) = \sum_{i=1}^{m} m_{ij} f_i$ ce qui montre que les coordonnées en question sont $m_{1j}, \ldots, m_{mj}$. Ainsi les j-ièmes colonnes de A et de M sont égales pour tout j. Donc $\psi(u) = A = M$. D'où la surjectivité. $\square$

Corollaire 2.2.4. *Soit E un espace vectoriel sur $\mathbf{k}$ de dimension finie. Alors* $\dim(E) = \dim(E^*)$.

Démonstration. Par le lemme, $\dim(E^*) = \dim(E) \cdot \dim(\mathbf{k}) = \dim(E) \cdot 1$. □

Exercice. Si $E = \mathbf{k}^n$ alors

$$E^* = \{w : \mathbf{k}^n \to k | \exists (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbf{k}^n, w(x_1, \ldots, x_n) = a_1 x_1 + \cdots + a_n x_n\}.$$

Remarquez que c'est une égalité, et pas seulement un isomorphisme "naturel".

2.3. Base duale.

Définition 2.3.1. *Soit $\mathcal{B} = (e_i, i \in I)$ une base d'un $\mathbf{k}$-espace vectoriel E. On définit une famille $\mathcal{B}^* = \{e_i^*, i \in I\}$ d'éléments de E^* comme suit : Pour tout $i \in I$, soit e_i^* l'unique élément de E^* tel que pour tout $j \in I$, $e_i^*(e_j) = \delta_{ij}$.*

Remarque 2.3.2.
- *I est un ensemble servant à indexer la base donnée. I peut être fini, infini dénombrable, ou infini non dénombrable.*
- *Une application linéaire est entièrement définie par la donnée de ses valeurs sur une base. C'est ce qui définit les e_i^*.*
- *Attention : la famille $\mathcal{B}^*$ dépend de la base $\mathcal{B}$.*

Théorème 2.3.3.
(1) *La famille $\mathcal{B}^*$ est libre.*
(2) *$\mathcal{B}^*$ est une base de E^* si et s. si* $\dim(E) < +\infty$.

Définition 2.3.4. *Dans le cas* $\dim(E) < +\infty$*, la famille $\mathcal{B}^*$ est appelée base duale de $\mathcal{B}$.*

Démonstration du théorème.
(1) Rappelons qu'une famille (finie ou infinie) est libre si et s. si toute sous-famille finie est libre. (C'est d'ailleurs ce qui définit la liberté d'une famille infinie.)
Soient $i_1, \ldots, i_m \in I$ et $\lambda_{i_1}, \ldots, \lambda_{i_m} \in \mathbf{k}$ tels que $\lambda_{i_1} e_{i_1}^* + \cdots + \lambda_{i_m} e_{i_m}^* = 0$. Pour $l = 1, \ldots, m$, on applique $\lambda_{i_1} e_{i_1}^* + \cdots + \lambda_{i_m} e_{i_m}^*$ à e_{i_l} ce qui donne

$$\begin{aligned} 0 &= (\lambda_{i_1} e_{i_1}^* + \cdots + \lambda_{i_m} e_{i_m}^*)(e_{i_l}) \\ &= \lambda_{i_1} e_{i_1}^*(e_{i_l}) + \cdots + e_{i_m}^*(e_{i_l}) \\ &= \lambda_{i_l} \cdot 1. \end{aligned}$$

On en déduit la liberté de la famille.

(2) Supposons que $\dim(E)$ soit finie. Alors par le Corollaire 2.2.4, on a $\dim(E) = \dim(E^*)$. La famille $\mathcal{B}^*$ étant libre de cardinal égal à $\dim(E)$, on en conclut que c'est une base de E^*.

Réciproquement supposons que $\dim(E)$ n'est pas finie, autrement dit que le cardinal de I n'est pas fini. On définit $w \in E^*$ en posant $w(e_i) = 1$ pour tout $i \in I$. (C'est possible par la remarque ci-dessus.) Supposons par l'absurde que $\mathcal{B}^*$ soit une base de E^* donc une famille génératrice. Alors il existe $e_{i_1}^*, \ldots, e_{i_m}^* \in \mathcal{B}^*$ et il existe des scalaires $\lambda_{i_1}, \ldots, \lambda_{i_m} \in \mathbf{k}$ tels que

$$w = \lambda_{i_1} e_{i_1}^* + \cdots + \lambda_{i_m} e_{i_m}^*.$$

I étant infini, soit $i \in I \smallsetminus \{\lambda_{i_1}, \dots, \lambda_{i_m}\}$. Pour un tel i, on a

$$\begin{aligned} 1 &= w(e_i) \\ &= (\lambda_{i_1} e_{i_1}^* + \cdots + \lambda_{i_m} e_{i_m}^*)(e_i) \\ &= \lambda_{i_1} e_{i_1}^*(e_i) + \cdots + \lambda_{i_m} e_{i_m}^*(e_i) \\ &= 0. \end{aligned}$$

D'où la conclusion.

□

2.4. **Base antéduale.** Dans ce paragraphe, on suppose E de dimension finie n.

Lemme 2.4.1. *Soit* $\{w_1, \dots, w_n\}$ *une base de* E^* *et soit* $v \in E$ *tels que* $w_i(v) = 0$ *pour tout* $i = 1, \dots, n$. *Alors* $v = 0$.

Démonstration. Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E et $\mathcal{B}^*$ sa base duale. Pour tout i, e_i^* appartient à $\mathrm{Vect}\{w_1, \dots, w_n\}$, on a donc $e_i^*(v) = 0$. Écrivons $v = \mu_1 e_1 + \cdots + \mu_n e_n$ avec $\mu_i \in \mathbf{k}$. Pour tout i, on a :

$$\begin{aligned} 0 &= e_i^*(v) \\ &= e_i^*(\mu_1 e_1 + \cdots + \mu_n e_n) \\ &= \mu_1 e_i^*(e_1) + \cdots + \mu_n e_n^*(e_n) \\ &= \mu_i. \end{aligned}$$

Par conséquent v est nul. □

Proposition 2.4.2. *Soit* $(w_1, \dots, w_n)$ *une base de* E^*. *Alors il existe une unique base* $\mathcal{B}$ *de* E *telle que* $\mathcal{B}^* = (w_1, \dots, w_n)$.

Démonstration. Soit $\psi : E \to \mathbf{k}^n$ donnée par $\psi(v) = (w_1(v), \dots, w_n(v))$. C'est une application linéaire (exercice). Par le lemme précédent, ψ est injective. Comme $\dim(E) = \dim(E^*) = n = \dim(\mathbf{k}^n)$, ψ est bijective.

Notons $(b_1, \dots, b_n)$ la base canonique de $\mathbf{k}^n$ (i.e. $b_1(1, 0, \dots, 0)$, $b_2 = (0, 1, 0, \dots, 0)$, etc). Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base quelconque de E. Dire que $\mathcal{B}^* = (w_1, \dots, w_n)$ équivaut à $\psi(e_i) = w_i$ pour tout i (exercice). Cette condition est aussi équivalente à $\psi(e_i) = b_i$ pour tout $i = 1, \dots, n$. Par bijectivité de ψ, il existe un unique n-uplet $(e_1, \dots, e_n) \in E^n$ tel que $\psi(e_i) = b_i$ pour $i = 1, \dots, n$. La famille des b_i étant une base et ψ étant un isomorphisme, ce n-uplet est une base de E. D'où l'existence et l'unicité comme voulue. □

Définition 2.4.3. *Étant donnée une base* $\mathcal{B}'$ *de* E^*. *La base* $\mathcal{B}$ *de* E *telle que* $\mathcal{B}^* = \mathcal{B}'$ *est appelée base antéduale de* $\mathcal{B}'$.

2.5. **Annulateurs.**

Définition 2.5.1. *Soit* A *une partie de* E *et soit* W *une partie de* E^*. *On définit :*
- $A^\circ = \mathrm{ann}_{E^*}(A) = \{w \in E^* \mid \forall x \in A, w(x) = 0\}$, *l'annulateur de* A *(dans* E^**).*
- $W_\circ = \mathrm{ann}_E(W) = \{x \in E \mid \forall w \in W, w(x) = 0\}$, *l'annulateur de* W *(dans* E*).*

Proposition 2.5.2. *Soient* A *et* W *comme ci-dessus.*
- $\mathrm{ann}_E(W)$ *et* $\mathrm{ann}_{E^*}(A)$ *sont des sous-espaces vectoriels respectifs de* E *et* E^*.
- $\mathrm{ann}_E(W) = \mathrm{ann}_E(\mathrm{Vect}(W))$ *et* $\mathrm{ann}_{E^*}(A) = \mathrm{ann}_{E^*}(\mathrm{Vect}(A))$.

Démonstration. En exercice. □

Proposition 2.5.3. *On suppose E de dimension finie. Soit F un s.e.v. de E et soit G un s.e.v. de E^*. On a :*

(1) $\dim(E) = \dim(F) + \dim(F^\circ)$,

(2) $\dim(E) = \dim(G) + \dim(G_\circ)$.

Démonstration. (1) Soit $(v_1, \dots, v_m)$ une base de F puis $\psi : E^* \to \mathbf{k}^m$ l'application (linéaire) définie par $\psi(w) = (w(v_1), \dots, w(v_m))$. Clairement, $\ker(\psi) = \mathrm{ann}_{E^*}\{v_1, \dots, v_m\} = \mathrm{ann}_{E^*}(F)$.

Supposons pour le moment que ψ soit surjective. Alors par le théorème du rang on aura : $\dim(E^*) = \dim(\ker(\psi)) + m$ ou encore $\dim(E) = \dim(\mathrm{ann}(F)) + \dim(F)$. cqfd.

Montrons que ψ est surjective. Complétons la famille libre $v_1, \dots, v_m$ en une base $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_m, \dots, v_n)$ de E et notons $\mathcal{B}^* = (v_1^*, \dots, v_m^*, \dots, v_n^*)$ sa base duale. Pour $i = 1, \dots, m$, $\psi(v_i^*) = (v_i^*(v_1), \dots, v_i^*(v_m))$ qui est égale au i-ième vecteur de la base canonique de $\mathbf{k}^m$. Ainsi dans $\mathrm{Im}(\psi)$ on trouve tous les vecteurs de la base canonique de $\mathbf{k}^m$ ce qui montre que $\mathrm{Im}(\psi) = \mathbf{k}^m$ ou encore que ψ est surjective.

(2) Soit $(w_1, \dots, w_p)$ une base de G et considérons l'application $\psi : E \to \mathbf{k}^p$ donnée par $\psi(x) = (w_1(x), \dots, w_p(x))$. Le noyau de ψ est égal à G_0 et par le théorème du rang, $\dim(E) = \dim(G_0) + \mathrm{rg}(\psi)$. Comme ci-dessus, la surjectivité de ψ terminerait la preuve.

Pour cela, complétons la famille $w_1, \dots, w_p$ en une base $\mathcal{B}' = (w_1, \dots, w_p, \dots, w_n)$ de E^* et soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ sa base antéduale. Pour $i = 1, \dots, p$, $\psi(e_i) = (w_1(e_i), \dots, w_p(e_i)) = (e_1^*(e_i), \dots, e_p^*(e_i))$ et c'est égal au i-ième vecteur de la base canonique de $\mathbf{k}^p$. On conclut comme précédemment à la surjectivité de ψ.

□

Corollaire 2.5.4. *On suppose E de dimension finie. Soient F et G des s.e.v. respectifs de E et E^*. On a $(F^\circ)_\circ = F$ et $(G_\circ)^\circ = G$.*

Démonstration. On montre (exercice) que $F \subset (F^\circ)_\circ$ et $G \subset (G_\circ)^\circ$. Par la proposition précédente on $\dim(F) = \dim((F^\circ)_\circ)$ et $\dim(G) = \dim((G_\circ)^\circ)$ d'où la conclusion. □

Comme autre conséquence directe de la proposition, on obtient :

Corollaire 2.5.5. *On suppose E de dimension finie. On a $E^\circ = (0_{E^*})$ et $(E^*)_\circ = (0_E)$.*

2.6. **Transposée.**

Définition 2.6.1. *Soient E, E' deux espaces vectoriels sur $\mathbf{k}$. Soit $u : E \to E'$ une application linéaire. On définit l'application transposée de u :*

$$\begin{array}{rccc} {}^t u : & E'^* & \to & E* \\ & w & \mapsto & w \circ u. \end{array}$$

La transposée d'une application linâire est linéaire et la transposition est également linéaire, autrement dit :

Proposition 2.6.2.

(1) *Pour $w, w' \in E'^*$ et $\lambda \in \mathbf{k}$, ${}^t u(\lambda w + w') = \lambda {}^t u(w) + {}^t u(w')$.*

(2) *Pour* $u, u' : E \to E'$ *linéaires et pour* $\lambda \in \mathbf{k}$, ${}^t(\lambda u + u') = \lambda {}^t u + {}^t v$.

Démonstration. En exercice. □

Proposition 2.6.3. *Soit* $u : E \to E'$ *linéaire. On suppose* E *et* E' *de dimension finie. Soient* $\mathcal{B}$ *et* $\mathcal{B}'$ *des bases respectives de* E *et* E'*, pour lesquelles on note* $\mathcal{B}^*$ *et* $\mathcal{B}'^*$ *les bases duales. Alors*

$$\mathrm{Mat}({}^t u, \mathcal{B}'^*, \mathcal{B}^*) = {}^t\mathrm{Mat}(u, \mathcal{B}, \mathcal{B}').$$

Démonstration. Notons $n = \dim(E)$ et $m = \dim(E')$. Notons $A = (a_{ij})_{1\leq i\leq m, 1\leq j\leq n}$ la matrice de u relativement aux bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$. Notons $B = (b_{ij})_{1\leq i\leq n, 1\leq j\leq m}$ la matrice de ${}^t u$ relativement aux bases $\mathcal{B}'^*$ et $\mathcal{B}^*$. Le but est de montrer que les matrices A et B sont transposée ou encore que $b_{ij} = a_{ji}$ pour tout i, j. Notons $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ et $\mathcal{B}' = (e'_1, \ldots, e'_n)$.

Fixons $j \in \{1, \ldots, m\}$ et $i \in \{1, \ldots, n\}$. Nous allons calculer $({}^t u(e_j'^*))(e_i)$ de deux façons différentes. D'une part, on a :

$$\begin{aligned} ({}^t u(e_j'^*))(e_i) &= (b_{1j}e_1^* + \cdots + b_{nj}e_n^*)(e_i) \\ &= b_{1j}e_1^*(e_i) + \cdots + b_{nj}e_n^*(e_i) \\ &= b_{ij}. \end{aligned}$$

D'autre part,

$$\begin{aligned} ({}^t u(e_j'^*))(e_i) &= (e_j'^* \circ u)(e_i) \\ &= e_j'^*(u(e_i)) \\ &= e_j'^*(a_{1i}e'_1 + \cdots + a_{mi}e'_m) \\ &= a_{1i}e_j'^*(e'_1) + \cdots + a_{mi}e_j'^*(e'_m) \\ &= a_{ji}. \end{aligned}$$

□

Proposition 2.6.4. *Soient* $u : E \to E'$ *et* $v : E' \to E''$ *deux applications linéaires. On a :*

$${}^t(v \circ u) = {}^t u \circ {}^t v.$$

Démonstration. Pour $w \in E''^*$, $({}^t(v\circ u))(w) = w\circ(v\circ u) = (w\circ v)\circ u = ({}^t v(w))\circ u = {}^t u({}^t v(w)) = ({}^t u \circ {}^t v)(w)$. □

Corollaire 2.6.5. *Soient* A, B *deux matrices à coefficients dans un corps* $\mathbf{k}$ *telles que le produit* AB *soit défini. Alors* ${}^t(AB) = {}^t B {}^t A$.
De plus si A *est inversible alors* ${}^t(A^{-1}) = ({}^t A)^{-1}$.

Démonstration. Notons $n \times m$ la taille de A et $m \times p$ celle de B (le produit AB étant défini, le nombre de colonnes de A doit être égal au nombre de lignes de B, ici m). Soit $u : \mathbf{k}^p \to \mathbf{k}^m$ et $v : \mathbf{k}^m \to \mathbf{k}^n$ données par $u(X) = B \cdot X$ et $v(Y) = A \cdot Y$. Notons $\mathcal{B}_p$, $\mathcal{B}_m$ et $\mathcal{B}_n$ les bases canoniques respectives de $\mathbf{k}^p$, $\mathbf{k}^m$ et $\mathbf{k}^n$. On a alors $B = \mathrm{Mat}(u, \mathcal{B}_p, \mathcal{B}_m)$, $A = \mathrm{Mat}(v, \mathcal{B}_m, \mathcal{B}_n)$ et $AB = \mathrm{Mat}(v \circ u, \mathcal{B}_p, \mathcal{B}_n)$.

Par les deux propositions précédentes,

$$\begin{array}{rcl} {}^t(AB) & = & {}^t\mathrm{Mat}(v\circ u, \mathcal{B}_p, \mathcal{B}_n) \\ & = & \mathrm{Mat}({}^t(v\circ u), \mathcal{B}_n^*, \mathcal{B}_p^*) \\ & = & \mathrm{Mat}({}^tu\circ {}^tv, \mathcal{B}_n^*, \mathcal{B}_p^*) \\ & = & \mathrm{Mat}({}^tu, \mathcal{B}_m^*, \mathcal{B}_p^*)\cdot \mathrm{Mat}({}^tv, \mathcal{B}_n^*, \mathcal{B}_m^*) \\ & = & {}^t\mathrm{Mat}(u, \mathcal{B}_p, \mathcal{B}_m)\cdot {}^t\mathrm{Mat}(v, \mathcal{B}_m, \mathcal{B}_n) \\ & = & {}^tB\cdot {}^tA. \end{array}$$

Supposons maintenant que A soit inversible. Alors $A\cdot A^{-1} = A^{-1}\cdot A = \mathrm{Id}$. Par le premier point, on obtient : $\mathrm{Id} = {}^t\mathrm{Id} = {}^t(A^{-1})\cdot {}^tA = {}^tA\cdot {}^t(A^{-1})$ d'où la conclusion. □

Remarque 2.6.6. *Dans les fiches de TD vous démontrerez que pour toute application linéaire u, $\mathrm{rg}(u) = \mathrm{rg}({}^tu)$. Par suite, pour toute matrice A, $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}({}^tA)$.*

2.7. Bidual.

Définition 2.7.1. *Pour un $\mathbf{k}$-espace vectoriel E, on note E^{**} le dual de E^*. On l'appelle le bidual de E.*

De plus, si $\mathcal{B}$ est une base de E, on note $\mathcal{B}^{**}$ la base duale de la base duale de $\mathcal{B}$. On l'appelle base biduale de $\mathcal{B}$.

On a vu que si $\dim(E)$ est fini alors E et E^* sont de même dimension. Ainsi E et E^* sont isomorphes. Mais il n'existe pas d'isomorphisme canonique entre E et E^* (i.e. qui ne dépend pas du choix de bases). On va voir qu'il en existe un entre E et E^{**}.

Proposition 2.7.2. *On suppose E de dimension finie. L'application $\Phi : E \to E^{**}$ définie par :*

$$\begin{array}{cccccccc} \Phi : & E & \to & E^{**} & & & \\ & x & \mapsto & \Phi(x) : & E^* & \to & \mathbf{k} \\ & & & & w & \mapsto & w(x) \end{array}$$

est un isomorphisme linéaire.

Démonstration. (1) En premier, il faut vérifier que pour tout $x\in E$, $\Phi(x)$ est bien un élément de E^{**}, autrement dit que $\Phi(x)$ est linéaire. (Exercice.)

(2) Il faut ensuite vérifier que Φ est linéaire. (Exercice.)

(3) Montrons l'injectivité de Φ. Soit $x\in\ker(\Phi)$. Alors pour tout $w\in E^*$, $0 = \Phi(x)(w) = w(x)$. Ainsi x annule toutes les formes linéaires sur E, autrement dit $x\in (E^*)_0 = (0)$.

(4) Par hypothèse, E est de dimension finie. Par conséquent, $\dim(E) = \dim(E^*) = \dim(E^{**})$. L'injectivité de Φ entraine donc sa bijectivité.

□

Exercice. (cf. TD)
Étant donné un espace vectoriel E de dimension n et une base $\mathcal{B}$ de E, montrer que la matrice de Φ relativement aux bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}^{**}$ est Id_n.
En déduire que si $x\in E$ a pour coordonnées $x_1,\dots,x_n$ dans la base $\mathcal{B}$ alors $\Phi(x)$ a ces mêmes coordonnées dans la base $\mathcal{B}^{**}$. (D'où une identification de E avec E^{**}.)

3. Forme bilinéaire sur un couple d'espaces vectoriels

3.1. **Premières définitions.** Dans toute la suite, $\mathbf{k}$ désigne un corps de caractéristique différente de 2 (i.e. dans lequel $1+1 \neq 0$).

Définition 3.1.1. Étant donnés deux espaces vectoriels E et F sur un même corps $\mathbf{k}$. Une forme bilinéaire b est une application de $E \times F$ vers le corps $\mathbf{k}$ telle que pour tout x (fixé) dans E, l'application $y \in F \mapsto b(x,y)$ est linéaire et pour tout y (fixé) dans F, l'application $x \in E \mapsto b(x,y)$ est linéaire.

Notons $\mathrm{Bil}(E,F)$ l'ensemble des formes bilinéaires sur $E \times F$.

Remarque 3.1.2. L'ensemble $\mathrm{Bil}(E,F)$ est un espace vectoriel sur $\mathbf{k}$. (*exo : le démontrer.*)

Attention. Il n'y a aucune raison pour que $b(x,y)+b(x',y')$ soit égale à $b(x+x, y+y')$. Ainsi, b n'est pas une application linéaire sur le produit $E \times F$.

Exemple 3.1.3. Quelques exemples de formes bilinéaires :
- Le produit scalaire usuel de $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$.
- Étant donné un espace vectoriel E, l'application $b : E \times E^* \to \mathbf{k}$ donnée par $b(\omega, x) = \omega(x)$ est une forme bilinéaire. On note habituellement
$$b(x,\omega) =< x, \omega >= \omega(x).$$
On parle du crochet de dualité.
- L'application
$$\mathrm{Hom}(F,E^*) \to \mathrm{Bil}(E,F); \phi \mapsto ((x,y) \mapsto \phi(y)(x))$$
est un isomorphisme d'espaces vectoriels (*exo : démontrez le en considérant l'application dans le sens 'inverse'* : $b \in \mathrm{Bil}(E,F) \mapsto (y \in F \mapsto b(.,y) \in E^*) \in \mathrm{Hom}(F,E^*)$.)

Remarque 3.1.4. Comme conséquence de cette dernière assertion, on voit que si E et F sont de dimension finie, alors $\mathrm{Bil}(E,F)$ a pour dimension $\dim(E) \cdot \dim(F)$.

3.2. **Matrices associées.** Ici nous supposons que $\dim E$ et $\dim F$ sont finies ; Fixons une base $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ de E et une base $\mathcal{C} = (f_1, \dots, f_m)$ de F.

On définit la matrice
$$\mathrm{mat}(b,\mathcal{B},\mathcal{C}) = \begin{pmatrix} b(e_1,f_1) & \cdots & b(e_1,f_m) \\ \vdots & & \vdots \\ b(e_n,f_1) & \cdots, & b(e_n,f_m) \end{pmatrix}$$
comme la matrice de la forme bilinéaire b dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$. Notons B cette matrice pour la suite.

Soit $x \in E$ et $y \in F$ dont on note $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}$ les vecteurs coordonnées dans les bases respectives $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$. On a alors :
$$b(x,y) = {}^tX \cdot B \cdot Y = (x_1, \dots, x_n) \cdot B \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}.$$

Démonstration de l'égalité. La bilinéarité de b nous permet d'obtenir les égalités suivantes :

$$\begin{aligned} b(x,y) &= b(\sum_1^n x_i e_i, \sum_1^m y_j f_j) \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m x_i y_j b(e_i, e_j). \end{aligned}$$

D'un autre coté,

$$\begin{aligned} {}^tX \cdot B \cdot Y &= (x_1, \ldots, x_n) \cdot \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^m b(e_1, e_j) y_j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^m b(e_n, e_j) y_j \end{pmatrix} \\ &= \sum_{i=1}^n x_i \sum_{j=1}^m b(e_i, e_j) y_j. \end{aligned}$$

Le résultat est démontré. □

On énonce maintenant un lemme facile et qui nous servira à plusieurs reprises dans la suite.

Lemme 3.2.1. *Soient B, B' deux matrices $n \times m$. On note X un vecteur colonne $n \times 1$ et Y un vecteur colonne $m \times 1$. Si pour tous X, Y on a ${}^tXBY = {}^tXB'Y$ alors $B = B'$.*

Démonstration. Si on note $B = (b_{ij})_{i,j}$ alors on voit que si X est le i-ième vecteur de la base canonique de $\mathbf{k}^n$ et Y est le j-ième vecteur de la base canonique de $\mathbf{k}^m$ alors ${}^tXBY$ est la matrice de taille 1×1 contenant le coefficient b_{ij}. Le lemme en découle immédiatement. □

Discutons maintenant de changements de bases.

Soient $\mathcal{B}' = (e'_1, \ldots, e'_n)$ une autre base de E et $\mathcal{C}' = (f'_1, \ldots, f'_m)$ une autre base de F. Notons X' et Y' les vecteurs coordonnées de x et y dans ces nouvelles bases. Notons S la matrice $n \times n$ de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ et T la matrice $m \times m$ de passage de $\mathcal{C}$ à $\mathcal{C}'$. On a donc $X = SX'$ et $Y = TY'$ et par suite

$$\begin{aligned} b(x,y) &= {}^tX \cdot B \cdot Y \\ &= {}^t(SX') \cdot B \cdot (TY') \\ &= {}^tX' \cdot {}^tSBT \cdot Y' \end{aligned}$$

Maintenant si on B' la matrice de b relativement aux bases $\mathcal{B}'$ et $\mathcal{C}'$, on a par définition : $b(x,y) = {}^tX' \cdot B'Y'$ donc d'après le lemme précédent, cela implique

$$B' = {}^tSBT.$$

3.3. **Applications linéaires associées - Rang de b.** On peut associer une application linéaire à la forme bilinéaire b appelée application linéaire à droite et qu'on notera δ (δ comme "d" et "d" comme "droite"). Il s'agit de l'application $\delta : F \to E^*$, $y \mapsto \delta(y)$ où pour tout $x \in E$, on a $\delta(y)(x) = b(x,y)$. On note souvent $\delta(y) = b(\cdot, y)$.

De même on définit l'application gauche $\gamma : E \to F^*$, $x \mapsto \gamma(x)$ de sorte que pour tout $y \in F$, $\gamma(x)(y) = b(x,y)$. On note $\gamma = b(x,\cdot)$.

La proposition suivante va nous permettre de définir proprement le rang de b.

Proposition 3.3.1. *Si l'une des applications δ ou γ est de rang fini alors l'autre l'est aussi et dans ce cas on a :* $\mathrm{rg}(\delta) = \mathrm{rg}(\gamma)$.

Démonstration. On va montrer que si $r = \mathrm{rg}(\delta)$ alors $\mathrm{rg}(\gamma) \leq r$. (On pourrait, de façon symétrique, montrer que si γ est de rang fini alors $\mathrm{rg}(\delta) \leq \mathrm{rg}(\gamma)$.)

Ainsi, soit $(w_1, \dots, w_r)$ une base de $\mathrm{Im}(\delta)$ (qui est un s.e.v. de E^*). Pour tout $y \in F$, $\delta(y) \in \mathrm{Im}(\delta)$ donc $\delta(y)$ se décompose de façon unique dans la base $(w_1, \dots, w_r)$. Ainsi pour tout $y \in F$, il existe un unique r-uplet $(\lambda_1(y), \dots, \lambda_r(y)) \in \mathbf{k}^r$ tel que

$$\delta(y) = \lambda_1(y)w_1 + \cdots + \lambda_r(y)w_r.$$

∘ Montrons que chaque λ_i est élément de F^*.
En effet, pour tout $i = 1, \dots, r$, on a une application de F vers $\mathbf{k}$ qui envoie y sur $\lambda_i(y)$. Il faut montrer que cette application est linéaire. Soient $y, y' \in F$ et $\mu \in \mathbf{k}$. D'une part on a :

$$\delta(\mu y + y') = \lambda_1(\mu y + y')w_1 + \cdots + \lambda_r(\mu y + y')w_r.$$

D'autre part :

$$\begin{aligned} \delta(\mu y + y') &= \mu\delta(y) + \delta(y') \\ &= \mu(\lambda_1(y)w_1 + \cdots + \lambda_r(y)w_r) + \lambda_1(y')w_1 + \cdots + \lambda_r(y')w_r \\ &= (\mu\lambda_1(y) + \lambda_1(y'))w_1 + \cdots + (\mu\lambda_r(y) + \lambda_r(y'))w_r. \end{aligned}$$

Par unicité des $\lambda_i(\mu y + y')$, on obtient pour tout i

$$\lambda_i(\mu y + y') = \mu\lambda_i(y) + \lambda_i(y').$$

∘ Montrons que $\mathrm{Im}(\gamma) \subset \mathrm{Vect}\{\lambda_1, \dots, \lambda_r\}$.
Pour tout $x \in E$, et pour tout $y \in F$,

$$\begin{aligned} \gamma(x)(y) &= b(x,y) \\ &= \delta(y)(x) \\ &= (\lambda_1(y)w_1 + \cdots + \lambda_r(y)w_r)(x) \\ &= \lambda_1(y)w_1(x) + \cdots + \lambda_r(y)w_r(x) \\ &= (w_1(x)\lambda_1 + \cdots + w_r(x)\lambda_r)(y). \end{aligned}$$

Cette égalité ayant lieu pour tout x et tout y, on en déduit que pour tout $x \in E$,

$$\gamma(x) = w_1(x)\lambda_1 + \cdots + w_r(x)\lambda_r$$

et donc que $\gamma(x)$ appartient à $\mathrm{Vect}\{\lambda_1, \dots, \lambda_r\}$. Autrement dit, $\mathrm{Im}(\gamma) \subset \mathrm{Vect}\{\lambda_1, \dots, \lambda_r\}$ d'où $\mathrm{rg}(\gamma) \leq r$. □

Proposition 3.3.2. *Soit $\mathcal{B}$ une base de E et $\mathcal{C}$ une base de F. Notons $\mathcal{B}^*$ et $\mathcal{C}^*$ leurs bases duales. Notons $B = \mathrm{Mat}(b, \mathcal{B}, \mathcal{C})$, $M_\delta = \mathrm{Mat}(\delta, \mathcal{C}, \mathcal{B}^*)$ et $M_\gamma = \mathrm{Mat}(\gamma, \mathcal{B}, \mathcal{C}^*)$. Alors :*

$$M_\gamma = {}^tM_\delta$$

et

$$M_\delta = B$$

Démonstration. Notons $M_\delta = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$ et $M_\gamma = (c_{ij})$, le but étant $a_{ij} = b_{ij} = c_{ji}$ pour tout i, j.

Notons $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ et $\mathcal{C} = (f_1, \ldots, f_m)$. Pour $i = 1, \ldots, n$ et pour $j = 1, \ldots, m$,

$\gamma(e_i) = c_{1i} f_1^* + \cdots + c_{mi} f_m^*$ et $\delta(f_j) = a_{1j} e_1^* + \cdots + a_{nj} e_n^*$.

Par conséquent, $b_{ij} = b(e_i, f_j) = \delta(f_j)(e_i) = a_{ij}$ et $b_{ij} = b(e_i, f_j) = \gamma(e_i)(f_j) = c_{ji}$. □

Définition 3.3.3. On définit le rang de la forme bilinéaire b comme le rang de l'application δ.

D'après les deux propositions précédentes. Ce rang est fini si et s. si le rang de γ est fini et dans ce cas ces rangs sont égaux. D'autre part, si E et F sont de dimension finie alors ce rang est égal au rang de la matrice de b relativement à n'importes quelles bases.

3.4. **Caractérisation du rang en terme d'écriture dans des bases.** Soit $\mathcal{B} = (e_i)_{i=1,\ldots,n}$ une base de E et $\mathcal{C} = (f_j)_{j=1,\ldots,m}$ une base de F, pour $x \in E$, on note $(x_1, \ldots, x_n)$ les coordonnées dans la base $\mathcal{B}$ et pour $y \in F$ on note $(y_1, \ldots, y_m)$ le vecteur coordonnées dans la base $\mathcal{C}$. On a vu que $b(x, y) = \sum_{i,j} b(e_i, f_j) x_i y_j$ où rappelons que les $b(e_i, f_j)$ sont des scalaires.

Ainsi $b(x, y) = \sum_{i,j} b_{ij} x_i y_j$ avec $b_{ij} \in \mathbf{k}$.

Proposition 3.4.1.
(1) *Si une telle somme contient p termes alors* $\mathrm{rang}(b) \leq p$.
(2) *De plus, il existe des bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ pour lesquelles l'écriture de $b(x, y)$ a exactement r termes (r étant le rang de b).*
Plus précisemment, il existe des bases $\mathcal{B}$ de E et $\mathcal{C}$ de F pour lesquelles

$$b(x, y) = \sum_{l=1}^{r} x_l y_l.$$

Remarque 3.4.2. *Le point (2) équivaut au fait qu'il existe une base $\mathcal{B}$ de E et une base $\mathcal{C}$ de F tels que*

$$\mathrm{Mat}(b, \mathcal{B}, \mathcal{C}) = \begin{pmatrix} \mathrm{Id}_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Démonstration. Par hypothèse, l'expression en question possède p termes, cela signifie que la matrice $A = ((b(e_i, f_j))_{i,j})$ a p coefficients non nuls. En conséquence, le nombre de colonnes non nuls de A est majoré par p. Le rang de A est donc au plus p. L'assertion (1) est démontrée. Démontrons la seconde.

Pour cela voici un **rappel de Math II**.
Soit $u : E \to E'$ une application linéaire où E et E' sont de dimension finie. Si on note r le rang de u alors il existe une base $\mathcal{B}$ de E et une base $\mathcal{B}'$ de E' tels que

$$\mathrm{Mat}(u, \mathcal{B}, \mathcal{B}') = \begin{pmatrix} \mathrm{Id}_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Idée de la preuve. On considère une base $(b'_1, \ldots, b'_r)$ de $\mathrm{Im}(u)$ qu'on complète en une base $(b'_1, \ldots, b'_r, \ldots, b'_m)$ de E'. On considère alors une base de $\mathcal{B}_2$ de $\ker(u)$ et une famille $\mathcal{B}_1 = (b_1, \ldots, b_r)$ d'antécédents de $(b'_1, \ldots, b'_r)$. On définit alors la famille $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2$. On montre qu'elle est libre (puis que c'est une base de E via un argument de dimension) et on a le résultat voulu.

Revenons à notre démonstration. Considérons l'application linéaire $\delta : F \to E^*$. Appliquons lui le rappel. On obtient une base $\mathcal{C}$ de F et une base $\mathcal{B}'$ de E^* tels que la $\mathrm{Mat}(\delta, \mathcal{C}, \mathcal{B}')$ ait la forme voulue. (Rappelons que le rang de b est par définition celui de δ.) Soit $\mathcal{B} \subset E$ la base antéduale de $\mathcal{B}'$. Alors la proposition précédente entraine que $\mathrm{Mat}(b, \mathcal{B}, \mathcal{C})$ a la forme voulue. □

3.5. **Non dégénéréscence - relations d'orthogonalité.**

Définition 3.5.1. On dit que b est non dégénérée si les applications droite et gauche δ et γ sont injectives.

Remarque 3.5.2. Dans le cas où E et F sont de dimension finie, cela implique que E et F ont même dimension (exo : pourquoi ?) et par suite que δ et γ sont des isomorphismes et donc également que la matrice de b dans n'importe quelles bases est inversible.

En conséquence du paragraphe précédent, cela équivaut au fait qu'il existe une base $\mathcal{B}$ de E et une base $\mathcal{C}$ de F pour lesquelles la matrice de b est la matrice Id_r, r étant le rang de b.

Définition 3.5.3. *On dit que $x \in E$ et $y \in F$ sont orthogonaux (relativement à b) si $b(x, y) = 0$.*

Remarquez que la non dégénéréscence de b équivaut au fait qu'un vecteur de E orthogonal à tout vecteur de F est nécessairement le vecteur nul et de même pour un vecteur de F orthogonal à tout vecteur de E.

Si A est un sous-ensemble de E, son orthogonal est

$$A^\perp = \{y \in F | \forall x \in A, b(x, y) = 0\}.$$

On définit de façon analogue l'orthogonal d'une partie B de F :

$$B^\perp = \{x \in E | \forall y \in B, b(x, y) = 0\}.$$

Il est facile de voir que l'orthogonal d'une partie de E est un sous-espace vectoriel de F (et vice-versa).

Proposition 3.5.4. *Si A est un s.e.v. de E et si b est non dégénérée alors*

$$\dim A + \dim A^\perp = n$$

où $n = \dim E = \dim F$.

Démonstration. Soit $y \in F$. Si $y \in A^\perp$ alors pour tout x dans A, $b(x, y) = 0$ ou encore $\gamma(x)(y) = 0$. Ainsi pour $w \in \gamma(A)$, $w(y) = 0$. Cela signifie que $y \in \mathrm{ann}_F(\gamma(A))$ où rappelons que $\gamma(A)$ est un s.e.v. de F^*.

Réciproquement, si $y \in \mathrm{ann}_F(\gamma(A))$ alors pour tout $x \in A$, $b(x, y) = \gamma(x)(y)$ est nécessairement nul.

On a donc montrer l'égalité : $A^\perp = \mathrm{ann}_F(\gamma(A))$.

D'aprés un résultat du chapitre Dualité (cf Prop. 2.5.3), on a : $\dim \gamma(A) + \dim A^\perp = \dim F$ or γ étant injective, $\gamma(A)$ a la même dimension que A d'où le résultat. □

3.6. **Généralités sur les formes bilinéaires sur un espace vectoriel - Noyau d'une forme bilinéaire - Adjoint d'une application linéaire.** Dans ce dernier paragraphe et pour faire la transition avec la suite, on donne quelques généralités concernant les formes bilinéaires sur un espace vectoriel, c'est à dire lorsque b prend sa source dans $E \times E$.

Matrices et changement de bases.

On a vu que dans le cas où b agit sur $E \times F$, on considérait une base dans E et une base dans F. Dans le cas où $E = F$, on pourrait faire de même et travailler avec deux bases (éventuellement) différente mais d'après ce qui précède toute forme bilinéaire se réduit modulo le choix de deux bases à $\sum_1^r x_l y_l$, r étant le rang de b.

Ainsi si on faisait le choix de déclarer deux formes équivalentes ssi dans certains couples de bases ils ont la même matrice alors cela signifierait que deux formes sont équivalente ssi elles ont même rang.

Cette notion d'équivalence est trop faible. En effet par exemple sur $\mathbb{R}^2$, les formes $b_1(x, y) = x_1 y_1 + x_2 y_2$ et $b_2(x, y) = x_1 y_1 - x_2 y_2$ ont le même rang pourtant beaucoup de différences existent entre elles : b_1 est un produit scalaire (c'est en fait le produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}^2$) alors que b_2 n'en est pas un. Pour b_2 le vecteur $(1, 1)$ est orthogonal à lui-même alors que pour b_1 il n'y a pas de vecteur orthogonal à lui-même autre que le vecteur 0. De telles différences ne sont pas mesurées par le rang, il faut un critère plus fin. C'est pour cette raison qu'il est préférable, si l'on veut avoir une classification intéressante des formes bilinéaires sur un espace vectoriel, de définir la matrice d'une forme bilinéaire à partir d'une seule base.

Remarque : Cette discussion est à rapprochée des notions de matrices équivalentes et matrices semblables.

Étant donnée une base $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ de E, on définit la matrice de b relativement à $\mathcal{B}$ comme

$$\mathrm{mat}(b, \mathcal{B}) = \begin{pmatrix} b(e_1, e_1) & \cdots & b(e_1, e_n) \\ \vdots & & \vdots \\ b(e_n, e_1) & \cdots & b(e_n, e_n) \end{pmatrix}.$$

Si $\mathcal{B}'$ est une autre base et P est la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ alors

$$\mathrm{mat}(b, \mathcal{B}') = {}^tP \cdot \mathrm{mat}(b, \mathcal{B}) \cdot P.$$

Définition 3.6.1. *Soient deux matrices carrées M et N de même taille. On dit qu'elle sont congruentes s'il existe P inversible (de même taille que M et N) tel que : $M = {}^tPNP$.*

Il est clair que la relation de congruence est une relation d'équivalence est un problème intéressant est de savoir quand deux matrices sont congruentes. On en reparlera.

Formes bilinéaires symétriques et antisymétriques

Définition 3.6.2. *Une forme bilinéaire $E \times E \to \mathbf{k}$ est dite symétrique si pour tous $x, y \in E$, $b(x, y) = b(y, x)$. Elle est dite antisymétrique si pour tous $x, y \in E$, $b(x, y) = -b(y, x)$.*

Il est clair que pour une base quelconque donnée, si on note M la matrice de b dans cette base alors M est symétrique ssi b l'est et M est antisymétrique ssi b l'est.

Noyau d'une forme bilinéaire

Rappelons que le rang de b est par définition le rang de l'application linéaire à droite $\delta : E \to E^*$, $y \mapsto b(\cdot, y)$. De façon équivalente, c'est le rang de l'application linéaire à gauche, ou encore celui de la matrice de b relativement à n'importe quelle base

Définition 3.6.3. On appelle noyau de b le noyau le l'application linéaire à droite δ. Un vecteur $x \in E$ est dit isotrope si $b(x, x) = 0$. On note $C(b)$ et on appelle cône isotrope de b l'ensemble des vecteurs isotropes de b.

Remarque 3.6.4.
- Relativement à une base donnée, le noyau de b s'exprime comme le noyau de la matrice de b relativement à la base en question.
- Pour définir le noyau de b, on aurait pu considérer le noyau de l'application linéaire à gauche γ. En fait $\ker \gamma$ est différent de $\ker \delta$ en général. (En effet dans une base donnée, cela revient à considérer le noyau d'une matrice et celle de sa transposée). Mais par contre les dimensions de $\ker \gamma$ et $\ker \delta$ sont égales (vu que le rang de γ et celui de δ sont égaux).
- Un vecteur est isotrope signifie qu'il est orthogonal à lui-même.
- La dénomination de "cône" vient du fait que si $x \in C(b)$ alors pour tout scalaire $\lambda \in \mathbf{k}$, $\lambda x \in C(b)$ (en effet $b(\lambda x, \lambda x) = \lambda^2 b(x, x)$), ainsi $C(b)$ est stable par toute homothétie de centre l'origine.

Proposition 3.6.5.
$$\dim E = \dim(\ker b) + \operatorname{rang}(b)$$

Démonstration. C'est une application directe du théorème du rang appliqué à l'application linéaire à droite δ. $\square$

Adjoint d'une application linéaire relativement à une forme bilinéaire

Soit b une forme bilinéaire sur E. On suppose b non dégénérée.

Définition 3.6.6. *Soit $u : E \to E$ une application linéaire. On dit que v est adjoint de u si $v : E \to E$ est une application linéaire vérifiant pour tous $x, y \in E$:*
$$b(u(x), y) = b(x, v(y)).$$

Proposition 3.6.7. *Sous les conditions de ce paragraphe (b non dégénérée), si un adjoint existe alors il est unique. On le note alors u^*.*

Démonstration. Supposons que deux adjoints v et v' existent. Alors pour tous $x, y \in E$, on a $b(x, v(y)) = b(x, v'(y))$. Notons $w = v - v'$. On obtient alors pour tous x, y, $b(x, w(y)) = 0$.

Nous allons montrer que pour tout $y \in E$, $w(y) = 0$ ce qui montrera l'égalité $v = v'$.

Soit y quelconque dans E alors pour tout $x \in E$, on a : $\delta(w(y))(x) = b(x, w(y)) = 0$ donc $\delta(w(y)) = 0$.

Comme b est non dégénérée, $\ker \delta = (0)$ donc $w(y) = 0$, ceci étant vrai pour tout y. Ainsi $w = 0$.

□

Remarque 3.6.8. *Si* $\dim E$ *n'est pas finie il existe des exemples pour lesquels un adjoint n'existe pas toujours (voir TD).*

Par contre...

Proposition 3.6.9. *Si* $\dim E < \infty$ *(et b est non dégénérée) alors tout endomorphisme u de E admet un adjoint u^* (unique).*

Démonstration. Puisque E est de dimension finie, δ est un isomorphisme. Posons $u^* = \delta^{-1} \circ {}^t u \circ \delta$. On a pour tous $x, y \in E$:

$$\begin{aligned} b(x, u^*(y)) &= (\delta(u^*(y)))(x) \\ &= (\delta(\delta^{-1} \circ {}^t u \circ \delta(y)))(x) \\ &= ({}^t u(\delta(y)))(x) \\ &= (\delta(y) \circ u)(x) \\ &= \delta(y)(u(x)) \\ &= b(u(x), y). \end{aligned}$$

□

Comme conséquence de cette démonstration on peut faire la remarque suivante.

Remarque 3.6.10. Il est à retenir qu'une fois fixée une base dans E, les matrices U de u et U^* de u^* satisfont

$$U^* = B^{-1} \cdot {}^t U \cdot B$$

B étant la matrice de b dans la base qu'on s'est fixée.

4. Formes bilinéaires symétriques et formes quadratiques

Ici on se propose de faire l'étude des formes bilinéaires sur un espace vectoriel E sur une corps $\mathbf{k}$ (i.e. b a comme source $E \times E$ et but $\mathbf{k}$) et telles que pour tout $x, y \in E$, $b(x,y) = b(y,x)$ (c'est la relation de symétrie). Rappelons que le corps $\mathbf{k}$ est supposé de caractéristique différente de 2.

En fait on va étudier des objets équivalents, à savoir les formes quadratiques.

Définition 4.0.11. Une forme quadratique sur E est une application $q : E \to \mathbf{k}$ telle qu'il existe une application bilinéaire (symétrique) b telle que pour tout $x \in E$, $q(x) = b(x,x)$.

4.1. **Relation entre formes bilinéaires symétriques et formes quadratiques.** Dans ce paragraphe, on note $Q(E)$ l'ensemble des formes quadratiques sur E. Il n'est pas difficile de voir que $Q(E)$ est un espace vectoriel sur $\mathbf{k}$. Nous allons exhiber un isomorphisme entre $Q(E)$ et l'espace vectoriel $\mathrm{Bil}_s(E)$ des formes bilinéaires symétriques.

Considérons les applications

$$\Phi : \begin{array}{ccc} \mathrm{Bil}_s(E) & \to & Q(E) \\ b & \mapsto & (x \mapsto b(x,x)) \end{array}$$

et

$$\Psi : \begin{array}{ccc} Q(E) & \to & \mathrm{Bil}_s(E) \\ q & \mapsto & ((x,y) \mapsto \frac{1}{2}(q(x+y) - q(x) - q(y)). \end{array}$$

Ici il y **deux points à montrer** :

(1) L'application Ψ est bien à valeurs dans $\mathrm{Bil}_s(E)$ (car a priori, $\Psi(q)$ est juste une application de $E \times E$ vers $\mathbf{k}$ mais n'a pas de raisons d'être bilinéaire).

(2) $\Phi \circ \Psi = \mathrm{Id}_{Q(E)}$ et $\Psi \circ \Phi = \mathrm{Id}_{\mathrm{Bil}_s(E)}$.

Démontrons ces deux points.

(1) Soit q une forme quadratique. Par définition de q, il existe b bilinéaire symétrique telle que $q(x) = b(x,x)$ pour tout $x \in E$. Pour $x, y \in E$, on a alors :

$$\begin{aligned} \Psi(q)(x,y) &= \frac{1}{2}(q(x+y) - q(x) - q(y)) \\ &= \frac{1}{2}(b(x+y, x+y) - b(x,x) - b(y,y)) \\ &= \frac{1}{2}(b(x,x) + b(x,y) + b(y,x) + b(y,y) - b(x,x) - b(y,y)) \\ &= \frac{1}{2}(b(x,y) + b(y,x)) \\ &= b(x,y) \text{ car } b \text{ est symétrique.} \end{aligned}$$

Ainsi l'image de q par Ψ est une bien une forme bilinéaire symétrique.

(2) Soit $b \in \mathrm{Bil}_s(E)$. Alors pour tout $x \in E$, $\Psi(\Phi(b)) = \frac{1}{2}(b(x+y, x+y) - b(x,x) - b(y,y))$ et le calcul du (1) montre qu'on obtient $b(x,y)$ d'où $\Psi \circ \Phi = \mathrm{Id}$.

Soit maintenant $q \in Q(E)$. Montrons que $q(\lambda x) = \lambda^2 q(x)$ pour $\lambda \in \mathbf{k}$ et $x \in E$. En effet, par définition de q il existe b bilinéaire symétrique telle que $q(\lambda x) = b(\lambda x, \lambda x) = \lambda^2 b(x,x) = \lambda^2 q(x)$.

Pour tout $x \in E$, nous avons : $\Phi(\Psi(q))(x) = \frac{1}{2}(q(x+x) - q(x) - q(x)) = \frac{1}{2}(q(2x) - 2q(x)) = \frac{1}{2}(2^2 q(x) - 2q(x)) = q(x)$. On en conclut que $\Phi \circ \Psi = \mathrm{Id}$.

Définition 4.1.1. Étant donnée une forme quadratique q, la forme bilinéaire symétrique $(x, y) \mapsto b(x, y) = \frac{1}{2}(q(x + y) - q(x) - q(y))$ s'appelle "la forme polaire" associée à q.

Ainsi la forme polaire de q est l'unique forme bilinéaire b telle que pour tout $x \in E$, $q(x) = b(x, x)$.

Définition 4.1.2. Soit q une forme quadratique sur E et on note b sa forme polaire.
- On appelle rang et noyau de q ceux de b. De même, pour une base $\mathcal{B}$, on définit $\mathrm{Mat}(q, \mathcal{B}) := \mathrm{Mat}(b, \mathcal{B})$.
- On dit que $x \in E$ est isotrope si $q(x) = 0$ (i.e. x est othogonal à lui-même). On appelle cône isotrope de q l'ensemble des vecteurs isotropes. On le note $C(q)$.

Le mot cône est justifié par le fait que $q(\lambda x) = \lambda^2 q(x)$ pour tout scalaire $\lambda \in \mathbf{k}$; ainsi si $x \in C(q)$ alors pour tout scalaire λ, λx est aussi dans $C(q)$, autrement dit $C(q)$ est stable par toute homothétie (de centre 0) d'où la dénomination de cône.

Remarque 4.1.3. *Il est clair que le noyau de q est inclus dans le cône mais il n'y a pas égalité en général. Par exemple, sur $\mathbb{R}^2$, $q(x_1, x_2) = x_1^2 - x_2^2$ a pour noyau la droite $\{0\}$ alors que son cône est la réunion des droites $x_1 + x_2 = 0$ et $x_1 - x_2 = 0$.*

Passage de b à q et vice-versa : point de vue pratique

On suppose $\dim E$ finie.

Étant donnée une base $\mathcal{B}$ de E, notons B la matrice de q (ou de sa forme polaire b) relativement à $\mathcal{B}$. Notons b_{ij} les coefficients de la matrice B. La matrice B est évidemment symétrique : $b_{ij} = b_{ji}$. Pour x (resp. y) dans E, on note $x_1, \ldots, x_n$ (resp. $y_1, \ldots, y_n$) les coordonnées dans la base $\mathcal{B}$.

On a alors :

$$b(x, y) = \sum_{i=1}^{n} b_{ii} x_i y_i + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} b_{ij} x_i y_j.$$

Le passage de b à q est facile : il suffit de "faire" $y_i = x_i$ dans l'égalitée ci-dessus. On obtient alors une expression de la forme :

$$q(x) = \sum_{i=1}^{n} c_i x_i^2 + \sum_{1 \leq i < j \leq n} c_{ij} x_i x_j.$$

Comment passe-t-on de cette expression à celle de b. On peut bien entendu utiliser l'expression $b(x, y) = 1/2(q(x + y) - q(x) - q(y))$. C'est un peu long. Une autre façon plus rapide est de remplacer
- les termes carrés $c_i x_i^2$ par $c_i x_i y_i$
- les termes rectangles $c_{ij} x_i x_j$ par $c_{ij} \cdot \frac{1}{2}(x_i y_j + x_j y_i)$.

Il est facile de voir que l'expression obtenue est bien celle d'une forme bilinéaire et qu'elle vérifie $b(x, x) = q(x)$. Par unicité, c'est néssairement la forme polaire de q.

4.2. **Bases orthogonales.**

Définition 4.2.1. *Soit E un espace vectoriel. Soit q une forme quadratique sur E et b sa forme polaire.*
- *Une famille $(e_i)_{i\in I}$ est dite orthogonale (relativement à q ou b) si pour tous $i, j \in I$ tels que $i \neq j$, on a $b(e_i, e_j) = 0$.*
- *Une famille $(e_i)_{i\in I}$ est dite orthonormale (relativement à q ou b) si pour tout $i, j \in I$, $b(e_i, e_j) = \delta_{ij}$ où δ_{ij} désigne le symbole de Kronecker.*

Théorème 4.2.2. *Tout espace vectoriel de dimension finie n, admet une base $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ orthogonale.*

Démonstration. La preuve se fait par récurrence sur la dimension n de E. Si $\dim E = 1$ c'est trivial. Supposons le résultat démontré pour un espace de dimension inférieure à celle de E.

Si $q = 0$ alors n'importe quelle base est orthogonale. Supposons $q \neq 0$. Soit alors e_1 tel que $q(e_1) \neq 0$. Notons F l'orthogonal de e_1. Montrons que $E = \mathrm{Vect}\{e_1\} \oplus F$.

Pour cela montrons les deux points suivants :
- $F \cap \mathrm{Vect}\{e_1\} = \{0\}$.
- $\dim F = n - 1$.

Pour le premier point : soit $x = \lambda e_1$ avec $x \in F$. Alors F étant orthogonal à e_1, on a : $b(\lambda e_1, e_1) = 0$ ou encore $0 = \lambda b(e_1, e_1) = \lambda q(e_1)$ or $q(e_1)$ est non nul donc $\lambda = 0$ et donc $x = 0$. Le premier point est démontrer.

Voyons pour le second. On voit facilement que $F = \ker(\delta(e_1))$ (en effet pour $x \in E$, $x \in F$ ssi $0 = b(x, e_1) = \delta(e_1)(x)$). Or $\delta(e_1)$ est une forme linéaire non nul, son noyau est donc de codimension 1, i.e. $\dim F = n - 1$.

La somme directe est donc acquise. On applique l'hypothèse de récurrence à F et on obtient une base $e_2, \ldots, e_n$.

Après une vérification facile, on constate que $e_1, e_2, \ldots, e_n$ est une base orthogonale de E. □

Remarque 4.2.3. *Il n'existe pas toujours de bases orthonormales. En effet, supposons (par l'absurde) que ce soit possible. Alors dans une telle base, la matrice de q serait la matrice identitée. Cela impliquerait que le rang de q est égal à n. C'est là qu'est la contradiction, car il existe beaucoup de formes quadratiques dégénérées.*

Proposition 4.2.4. *Soit E un espace vectoriel de dimension finie. soit q une forme quadratique sur E. Soit $\mathcal{B}$ une base de E. Alors*

$$\mathcal{B} \text{ est orthogonale} \iff \mathrm{Mat}(q, \mathcal{B}) \text{ est diagonale.}$$

et

$$\mathcal{B} \text{ est orthonormale} \iff \mathrm{Mat}(q, \mathcal{B}) = \mathrm{Id}_n.$$

Démonstration. Notons b la forme polaire de q. Notons $B = \mathrm{Mat}(b, \mathcal{B})$. Notons $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$. Ainsi $B = (b(e_i, e_j))_{1\leq i,j\leq n}$. Dire que la matrice B est diagonale revient à dire que les $b(e_i, e_j)$ sont nuls si $i \neq j$. C'est exactement la condition d'othogonalité de la base $\mathcal{B}$. □

Corollaire 4.2.5. *Soit E un espace vectoriel de dimension finie. soit q une forme quadratique sur E. Soit $\mathcal{B}$ une base orthogonale de E. Alors*

$$\mathrm{rg}(q) = \mathrm{card}\{e \in \mathcal{B} \mid q(e) \neq 0\}.$$

Démonstration. Notons $B = \mathrm{Mat}(q, \mathcal{B})$. Par la proposition précédente, B est diagonale. Donc son rang est égal au nombre de coefficients diagonaux non nuls. Et ces coefficients sont exactements les $q(e) \neq 0$ pour $e \in \mathcal{B}$. D'où la conclusion. $\square$

4.3. **Point de vue pratique : orthogonalisation de Gauss.** Ici on se fixe une base $\mathcal{B}$ de E. Dans une telle base, on peut écrire :

$$q(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i^2 + \sum_{1 \leq i < j \leq n} b_{ij} x_i x_j.$$

où $x_1, \ldots, x_n$ sont les coordonnées de x dans la base $\mathcal{B}$.

D'après le paragraphe précédent, il existe une base $\mathcal{C}$ de E pour laquelle on a :

$$q(x) = \sum_{i=1}^{n} c_i (x_i')^2$$

où $x_1', \ldots, x_n'$ sont les coordonnées de x dans cette base $\mathcal{C}$. Le but de ce paragraphe est de montrer comment cela peut se faire de façon explicite.

Le point de départ est une base $\mathcal{B}$ pour laquelle :

$$q(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i^2 + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} b_{ij} x_i x_j,$$

les x_i étant les coordonnées de x dans la base $\mathcal{B}$.

Nous allons dans un premier temps montrer ceci :

Première étape.

On écrit

$$q(x) = \sum_{i=1}^{r} c_i (x_i')^2$$

avec $c_i \in \mathbf{k} \smallsetminus \{0\}$, $1 \leq r \leq n$ et où chaque x_i' est une combinaison linéaire de $x_1, \ldots, x_n$
(notons : pour $i = 1, \ldots, r$, $x_i' = a_{i1} x_1 + \cdots + a_{in} x_n$)
de telle sorte que les x_i' soient linéairement indépendants ; autrement dit les vecteurs $l_1 = (a_{11}, \ldots, a_{1n})$, $\ldots$, $l_r = (a_{r1}, \ldots, a_{rn})$ sont linéairement indépendants.

Supposons cette première étape réalisée.

On complète alors $l_1, \ldots, l_r$ par $l_{r+1}, \ldots, l_n$ pour obtenir une base de $\mathbf{k}^n$.

Soit alors P la matrice dont les lignes sont les l_i. La matrice P est inversible et on a : $P \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1' \\ \vdots \\ x_n' \end{pmatrix}$.

On définit une nouvelle base $\mathcal{B}' = (e_1', \ldots, e_n')$ comme suit : e_i' est tel que ses coordonnées dans $\mathcal{B}$ sont celle du vecteur $P^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ où ici le 1 est à la i$^{\text{ème}}$ position.

Soit x quelconque dans E. La base $\mathcal{B}'$ est construite de sorte que si x a pour coordonnées $x_1, \ldots, x_n$ dans la $\mathcal{B}$ et $x'_1, \ldots, x'_n$ dans $\mathcal{B}'$ alors $P \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix}$.

Cela nous dit donc que l'écriture de $q(x)$ relativement à la base $\mathcal{B}'$ est

$$q(x) = \sum_{i=1}^{r} c_i (x'_i)^2 + \sum_{i=r+1}^{n} 0 \cdot (x'_i)^2.$$

Ainsi

$$\mathrm{mat}(q, \mathcal{B}') = \begin{pmatrix} c_1 & 0 & & & & 0 \\ 0 & \ddots & & & & \\ & & c_r & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 & & \\ & & & & \ddots & 0 \\ 0 & & \cdots & & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

ce qui montre que $\mathcal{B}'$ est une base orthogonale et que r est le rang de q.

Maintenant il nous reste à voir la :

<u>Réalisation de la première étape.</u>

Rappelons que

$$q(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i^2 + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} b_{ij} x_i x_j.$$

<u>1er cas : Il existe $a_i \neq 0$.</u>

Pour simplifier, supposons $a_1 \neq 0$. On écrit $q(x)$ sous la forme

$$q(x) = a_1 x_1^2 + x_1 \cdot L(x_2, \cdots, x_n) + q'(x_2, \ldots, x_n).$$

Ici, ce qu'on a fait c'est factoriser par x_1 et obtenir L qui ne dépend pas de x_1 (pusiqu'on a mis de côté x_1^2) et on note q' le reste qui ne dépend donc pas de x_1.

Que constate-t-on ? Par construction, L est une combinaison linéaire de $x_2, \ldots, x_n$ et que q' est une forme quadratique en les variables $x_2, \ldots, x_n$ (autrement dit, q' est une forme quadratique sur l'espace vectoriel $\mathrm{Vect}\{e_2, \ldots, e_n\}$).

Pour simplifier, posons $L' = \frac{1}{a_1} L$, on a alors :

$$q(x) = a_1(x_1^2 + x_1 L'(x_2, \ldots, x_n)) + q'.$$

On utilise alors l'identité :

$$(x_1 + \frac{1}{2}\alpha)^2 = x_1^2 + x_1 \alpha + \frac{1}{4}\alpha^2.$$

Cela donne alors

$$q(x) = a_1[(x_1 + \frac{1}{2} L'(x_2, \ldots, x_n))^2 - \frac{1}{4}(L'(x_2, \ldots, x_n))^2] + q'.$$

On obtient finalement l'écriture suivante :

$$a_1(x_1 + \frac{1}{2} L'(x_2, \ldots, x_n))^2 + q''(x_2, \ldots, x_n)$$

où $q'' = q'(x_2, \ldots, x_n) - \frac{a_1}{4}(L'(x_2, \ldots, x_n))^2$.

Le bilan de ce calcul est le suivant : On a écrit $q(x)$ comme a_1 multiplié par le carré d'une combinaison linéaire des x_i contenant à coup sûr x_1, auquel s'ajoute q''. Et q'' est en fait une forme quadratique en les coordonnées $x_2, \ldots, x_n$.

L'idée est maintenant de continuer le processus avec q''. Si dans q'' on un terme x_i^2 alors on applique à nouveau la méthode vue dans ce premier cas. Sinon.... on applique la construction donnée dans le 2ème cas que voici.

2ème cas : tous les a_i sont nuls

Dans ce cas, $q(x) = 2\sum_{1\leq i<j\leq n} b_{ij}x_ix_j$. Pour simplifier, oublions le facteur 2, et faisons comme si

$$q(x) = \sum_{1\leq i<j\leq n} b_{ij}x_ix_j.$$

Ici on choisit un couple (i,j) tel que $b_{ij} \neq 0$ (s'il n'y en a pas alors c'est que $q = 0$) : pour simplifier supposons que ce couple soit $(1,2)$.

On écrit alors :

$$q = x_1x_2 + x_1L_2(x_3, \ldots, x_n) + x_2L_1(x_3, \ldots, x_n) + q'(x_3, \ldots, x_n).$$

Une telle écriture est possible : en effet, on met de côté le terme x_1x_2. Dans le reste, il y a des termes avec du x_1, d'autres avec du x_2 (mais pas de termes avec les deux !) et des termes sans x_1 et sans x_2. On factorise par x_1 ce qu'on peut et on appelle L_2 le facteur ; dans ce facteur il n'y a pas de x_1, ni de x_2 donc L_2 ne dépend que $x_3, \ldots, x_n$. De même, on met en facteur x_2 et on note L_1 le facteur ; pour la même raison L_1 ne dépend que de $x_3, \ldots, x_n$. Enfin on note q' le reste et ce reste, également, ne dépend que de $x_3, \ldots, x_n$.

Une fois ceci fait, on constate qu'en fait, L_1 et L_2 sont des combinaisons linéaires de $x_3, \ldots, x_n$ et que q' est une forme quadratique en les coordonnées $x_3, \ldots, x_n$.

On écrit ensuite :

$$q(x) = (x_1 + L_1)(x_2 + L_2) - L_1L_2 + q'.$$

On constate que le produit L_1L_2 est une forme quadratique en $x_3, \ldots, x_n$.

On utilise alors l'identié :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{4}[(\alpha+\beta)^2 - (\alpha-\beta)^2] &= \frac{1}{4}[((\alpha+\beta)+(\alpha-\beta))((\alpha+\beta)-(\alpha-\beta))] \\
&= \frac{1}{4}[2\alpha 2\beta] \\
&= \alpha\beta.
\end{aligned}$$

On obtient alors :

$$\begin{aligned}
q(x) &= \frac{1}{4}[(x_1 + x_2 + L_1 + L_2)^2 - (x_1 - x_2 + L_1 - L_2)^2] \\
&\quad + q''(x_3, \ldots, x_n)
\end{aligned}$$

où $q'' = q' - L_1L_2$.

Le bilan est qu'on a écrit q comme somme de deux carrés de coombinaisons de $x_1, x_2, \ldots, x_n$ (ces combinaisons sont linéairement indépendantes car la première est de la forme $x_1 + x_2+$ des termes en $x_3, \ldots, x_n$ et la seconde est la forme $x_1 - x_2+$ des termes en $x_3, \ldots, x_n$) auxquels s'ajoute q'' qui est une forme quadratique en $x_3, \ldots, x_n$.

On recommence alors avec q''.

Bilan des deux cas : Dans les deux cas on écrit q comme un ou deux carrées plus une forme quadratique avec moins de variables et la construction nous assure que la suite nous donnera forcément des combinaisons linéaires indépendantes de celles précédemment obtenues et ce jusqu'à épuisement des variables.

Voyons deux exemples :

Exemple 1 Sur $\mathbb{R}^3$, soit q la forme quadratique telle que dans la base canonique $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$, on ait

$$q(x, y, z) = 4xy - 8xz + 4yz.$$

Nous sommes dans le 2ème cas.

$$\begin{aligned}
q &= 4[xy + x \cdot (-2z) + y \cdot z] \text{ on choisit de travailler avec } x \text{ et } y \\
& \text{on cherche à écrire } q \text{ sous la forme suivante} \\
q &= 4[(x{+}?z) \cdot (y{+}?z)]{+}? \\
& \text{le but est de remplacer les ? par ce qu'il faut... Cela donne :} \\
q &= 4[(x + z) \cdot (y - 2z)] + 8z^2 \\
q &= 4\frac{1}{4}[(x + y - z)^2 - (x - y + 3z)^2] + 8z^2 \\
q &= (x + y - z)^2 - (x - y + 3z)^2 + 8z^2
\end{aligned}$$

Maintenant on sait qu'il existe une base $\mathcal{B}'$ telle que la matrice de q dans $\mathcal{B}'$ est

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}.$$

En fait on a même ce qui caractérise de façon unique une base pour laquelle la matrice de q est celle-ci. En effet la base $\mathcal{B}'$ que l'on cherche est caractériser par le fait suivant : Pour tout vecteur u de $\mathbb{R}^3$, ses coordonnées sont (x, y, z) dans la base canonique $\mathcal{B}$ si et seulement si elles sont $(x + y - z, x - y + 3z, z)$ dans la base recherchée $\mathcal{B}'$. Notons $\mathcal{B}' = (e'_1, e'_2, e'_3)$. On a :

- Le vecteur e_1 a pour coordonnées $(1, 0, 0)$ dans $\mathcal{B}$ donc il a pour coordonnées $(1, 1, 0)$ dans $\mathcal{B}'$, et donc
  $e_1 = e'_1 + e'_2$.
- De la même façon, e_2 a pour coordonnées $(0, 1, 0)$ dans $\mathcal{B}$ donc ses coordonnées sont $(1, -1, 0)$ dans $\mathcal{B}'$ donc
  $e_2 = e'_1 - e'_2$.
- Enfin e_3 a pour coordonnées $(0, 0, 1)$ dans $\mathcal{B}$ et donc a pour coordonnées $(-1, 3, 1)$ dans $\mathcal{B}'$ donc
  $e_3 = -e'_1 + 3e'_2 + e'_3$.

Le but est maintenant d'écrire les e'_i en fonction des e_i. L'orthogonalisation de Gauss est telle que les équations obtenues sont relativement simples, c'est le cas ici. On obtient après un calcul facile :

$e'_1 = \frac{1}{2}(e_1 + e_2) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0)$
$e'_2 = \frac{1}{2}(e_1 - e_2) = (\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 0)$
$e'_3 = -e_1 + 2e_2 + e_3 = (-1, 2, 1)$.

Avant de passer à l'exemple 2, faisons une remarque.

On a obtenu le résultat suivant :

$$q(x, y, z) = (x + y - z)^2 - (x - y + 3z)^2 + 8z^2$$

Rien n'empèche d'écrire ceci sous la forme suivante

$$q(x, y, z) = (x + y - z)^2 - (x - y + 3z)^2 + 2 \cdot (2z)^2.$$

Cette écriture nous dit qu'il existe une autre base, appelons là $\mathcal{B}''$ pour laquelle la matrice de q est

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

En fait il n'est pas difficile de voir que la base $\mathcal{B}'' = (e_1', e_2', \frac{1}{2}e_3')$ convient.

Quel enseignement tirer de cette remarque ? Lors de la diagonalisation d'un endomorphisme, il y a unicité de la matrice diagonale obtenue (à l'ordre près). Les éléments de la diagonale sont les valeurs propres.

Ici en ce qui concerne la "diagonalisation" d'une forme quadratique (on devrait dire l'"orthogonalisation" d'une forme quadratique), les coefficients de la matrice diagonale obtenue ne sont pas uniques comme le montre la remarque. Il ne faut donc pas confondre diagonalisation d'un endomorphisme et "diagonalisation" d'une forme quadratique.

<u>Exemple 2.</u> Sur $\mathbb{R}^3$, soit q telle que dans la base canonique $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$, on ait

$$q(x, y, z) = 2x^2 - 2y^2 + z^2 - 4xy + 4xz - 8yz.$$

Voici un calcul possible :

$$\begin{array}{rcl} q(x, y, z) & = & 2(x^2 + x(2z - 2y)) - 2y^2 + z^2 - 8yz \\ & = & 2(x^2 + 2 \cdot x \cdot (z - y)) - 2y^2 + z^2 - 8yz \\ & = & 2((x + z - y)^2 - (z - y)^2) - 2y^2 + z^2 - 8yz \\ & = & 2(x - y + z)^2 - 4y^2 - 4yz - z^2 \\ & = & 2(x - y + z)^2 - 4(y^2 + 2y\dfrac{z}{2}) - z^2 \\ & = & 2(x - y + z)^2 - 4((y + \dfrac{1}{2}z)^2 - \dfrac{1}{4}z^2) - z^2 \\ & = & 2(x - y + z)^2 - 4(y + \dfrac{1}{2}z)^2. \end{array}$$

Ceci nous dit que le rang de q est 2 et qu'il existe une base pour laquelle la matrice de q est

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Pour trouver la base qui convient, il faut d'abord compléter les l_i (voir les notations précédentes). Le plus simple est d'écrire :

$$q(x, y, z) = 2(x - y + z)^2 - 4(y + \frac{1}{2}z)^2 + 0 \cdot z^2.$$

Pour déterminer la base $\mathcal{B}'$ on fait comme dans l'exemple 1 en utilisant le fait qu'un vecteur de coordonnées (x, y, z) dans la base $\mathcal{B}$ aura pour coordonnées $(x-y+z, y+\frac{1}{2}z, z)$ dans la base $\mathcal{B}'$ recherchée.

4.4. **Formes quadratiques équivalentes.**

Définition 4.4.1. *Soit E un espace vectoriel de dimension finie sur un corps $\mathbf{k}$. Soient q et q' deux formes quadratiques sur E. La forme q est dite équivalente à q' s'il existe un isomorphisme linéaire $u : E \to E$ tel que pour tout $x \in E$, $q(x) = q'(u(x))$. On note $q \sim q'$.*

Remarque 4.4.2. La relation $q \sim q'$ est une **relation d'équivalence**.
En effet, elle est réflexive (en prenant $u = \mathrm{Id}$). Elle est symétrique car si $\forall x \in E, q(x) = q'(u(x))$ alors $\forall x \in E,\ q'(x) = q(u^{-1}(x))$ (exercice). Enfin elle transitive. En effet si $q = q' \circ u$ et $q' = q'' \circ v$ alors alors $q = q'' \circ (v \circ u)$.

Lemme 4.4.3. *Soient q et q' deux formes quadratiques sur E (de dimension finie). Notons b et b' leur forme polaire respective. Soit $u : E \to E$ un isomorphisme tel que pour tout $x \in E$, $q(x) = q'(u(x))$. Alors pour tout $x, y \in E$, $b(x, y) = b'(u(x), u(y))$.*

Démonstration. Pour $x, y \in E$,

$$\begin{aligned}
b'(u(x), u(y)) &= \frac{1}{2}(q'(u(x) + u(y)) - q'(u(x)) - q'(u(y))) \\
&= \frac{1}{2}(q'(u(x + y)) - q'(u(x)) - q'(u(y))) \\
&= \frac{1}{2}(q(x + y) - q(x) - q(y)) \\
&= b(x, y).
\end{aligned}$$

□

Proposition 4.4.4. *Soient q et q' deux formes quadratiques sur E de dimension finie. Les assertions suivantes sont équivalentes.*

(1) *q et q' sont équivalentes.*
(2) *Pour toute base $\mathcal{B} \subset E$ il existe une base $\mathcal{B}' \subset E$ telle que $\mathrm{Mat}(q, \mathcal{B}) = \mathrm{Mat}(q', \mathcal{B}')$.*
(3) *Pour toute base $\mathcal{B} \subset E$, les matrices $\mathrm{Mat}(q, \mathcal{B})$ et $\mathrm{Mat}(q', \mathcal{B})$ sont congruentes.*
(4) *Il existe une base $\mathcal{B} \subset E$ telle que les matrices $\mathrm{Mat}(q, \mathcal{B})$ et $\mathrm{Mat}(q', \mathcal{B})$ soient congruentes.*

Démonstration. Notons n la dimension de E.

(1) $\Rightarrow$ (2). Soient b et b' les formes polaires associées. Soit $\mathcal{B}$ une base quelconque de E. Notons $B = \mathrm{Mat}(q, \mathcal{B})$, $B' = \mathrm{Mat}(q', \mathcal{B})$ et $U = \mathrm{Mat}(u, \mathcal{B})$. Soient X, Y deux vecteurs quelconques de $\mathbf{k}^n$. Soient x et y les vecteurs de E dont X et Y sont les vecteurs des coordonnées dans $\mathcal{B}$. Par hypothèse et par le lemme précédent on a $b(x, y) = b'(u(x), u(y))$ ce qui entraine ${}^tXBY = {}^t(UX)B'(UY) = {}^tX({}^tUB'U)Y$. Soit alors $\mathcal{B}'$ l'unique base de E telle que la matrice de passage $\mathrm{Pass}(\mathcal{B}, \mathcal{B}')$ soit égale à U. On obtient $\mathrm{Mat}(b', \mathcal{B}') = {}^tUB'U$ ce qui donne

$$ {}^tXBY = {}^tX\mathrm{Mat}(b', \mathcal{B}')Y. $$

Cette égalité ayant lieu pour tout X, Y, on en conclut que $\mathrm{Mat}(b, \mathcal{B}) = \mathrm{Mat}(b', \mathcal{B}')$.

(2) $\Rightarrow$ (3). Par hypothèse, il existe $\mathcal{B}_0$ et $\mathcal{B}'_0$ deux bases telles que $\mathrm{Mat}(b, \mathcal{B}_0) = \mathrm{Mat}(b', \mathcal{B}'_0)$. Soit $\mathcal{B}$ une base quelconque de E. On sait que $\mathrm{Mat}(q, \mathcal{B})$ et $\mathrm{Mat}(q, \mathcal{B}_0$ sont congruentes. De même $\mathrm{Mat}(q', \mathcal{B}')$ et $\mathrm{Mat}(q, \mathcal{B}'_0)$ sont congruentes. La congruence étant une relation d'équivalence, on peut conclure.

(3) $\Rightarrow$ (4). C'est immédiat.

(4) $\Rightarrow$ (1). Par hypothèse il existe une base $\mathcal{B}$ telles que $\mathrm{Mat}(q,\mathcal{B})$ et $\mathrm{Mat}(q',\mathcal{B})$ sont congruentes. Notons B et B' ces matrices. Il existe donc P inversible telle que $B = {}^tPB'P$. On définit alors $u : E \to E$ comme l'unique endomorphisme de E tel que $\mathrm{Mat}(u,\mathcal{B}) = P$. La matrice P étant inversible, u est un isomorphisme. Soit alors $x \in E$ pour lequel on note X le vecteur coordonnées dans $\mathcal{B}$. Alors l'égalité $B = {}^tPB'P$ entraine $q(x) = {}^tXBX = {}^tX{}^tPB'PX = {}^t(PX)B'(PX) = q'(u(x))$.

□

4.5. **Formes quadratiques sur $\mathbb{C}$.** Ici E désigne un espace vectoriel **complexe** de dimension finie n.

Proposition 4.5.1. *Soit q une forme quadratique sur E. Soit r le rang de q. Alors il existe une base $\mathcal{B}$ de E telle que*

$$\mathrm{Mat}(q,\mathcal{B}) = \begin{pmatrix} \mathrm{Id}_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Démonstration. Soit $\mathcal{B}_0 = (e_1,\ldots,e_n)$ une base orthogonale. Quitte à réordonner cette base, on peut supposer que les e_i tels que $q(e_i) = 0$ soient mis en dernier. Ainsi

$$\mathrm{mat}(q,\mathcal{B}_0) = \begin{pmatrix} c_1 & 0 & & & & 0 \\ 0 & \ddots & & & & \\ & & c_r & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 & & \\ & & & & \ddots & 0 \\ 0 & & \cdots & & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

avec $c_i \neq 0$. Pour $i = 1,\ldots,r$, soit $d_i \in \mathbb{C}$ une solution de $X^2 = c_i$. On pose alors $\mathcal{B} = (\frac{1}{d_1}e_1,\ldots,\frac{1}{d_r}e_r,e_{r+1},\ldots,e_n)$. Alors pour $i = 1,\ldots,r$, $q(\frac{1}{d_i}e_i) = \frac{1}{d_i^2}q(e_i) = \frac{1}{d_i^2}c_i = 1$. La base $\mathcal{B}$ répond à la question. □

Corollaire 4.5.2. *Soient q et q' deux formes quadratiques sur (un espace vectoriel complexe) E. Alors :*

$$q \sim q' \iff \mathrm{rg}(q) = \mathrm{rg}(q')$$

Démonstration. $\Rightarrow$: Supposons $q \sim q'$ alors par la Prop. 4.4.4, il existe des bases $\mathcal{B},\mathcal{B}'$ de E telles que $\mathrm{Mat}(q,\mathcal{B}) = \mathrm{Mat}(q',\mathcal{B}')$. Ces matrices ont donc le même rang. On en déduit que $\mathrm{rg}(q) = \mathrm{rg}(q')$.

$\Leftarrow$: Supposons que $\mathrm{rg}(q) = \mathrm{rg}(q')$. Par la proposition précédente, il existe une base $\mathcal{B}$ et une base $\mathcal{B}'$ telles que

$$\mathrm{Mat}(q,\mathcal{B}) = \begin{pmatrix} \mathrm{Id}_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathrm{Mat}(q',\mathcal{B}').$$

□

4.6. **Formes quadratiques sur un $\mathbb{R}$.** Ici E désigne un **espace vectoriel réel**. On suppose E de dimension finie n à chaque fois qu'on parle de matrice.

Définition 4.6.1. *Soit q une forme quadratique sur E.*
- *On dit que q est positive si $\forall x \in E,\ q(x) \geq 0$.*
- *On dit que q est négative si $\forall x \in E,\ q(x) \leq 0$.*
- *On dit que q est définie si $C(q) = \{0\}$. Autrement dit $\forall x \neq 0,\ q(x) \neq 0$.*
- *On dit que q est définie-positive (resp. définie-négative) si elle est définie et positive (resp. négative).*

Pour "définie-positive" cela se traduit par : pour tout $x \neq 0$, $q(x) > 0$.

Lemme 4.6.2. *Soit $e_1, \dots, e_l$ une famille orthogonale pour q. Alors pour tout $(\lambda_1, \dots, \lambda_l) \in \mathbb{R}^l$,*

$$q(\lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_l e_l) = \lambda_1^2 q(e_1) + \cdots + \lambda_l^2 q(e_l).$$

Démonstration. Notons b la forme polaire de q. Nous avons :

$$\begin{aligned} q(\sum_{i=1}^{l} \lambda_i e_i) &= b(\sum_{i=1}^{l} \lambda_i e_i, \sum_{i=j}^{l} \lambda_j e_j) \\ &= \sum_{i=1}^{l} \sum_{j=1}^{l} \lambda_i \lambda_j b(e_i, e_j). \end{aligned}$$

Or la famille étant orthogonale, nous avons $b(e_i, e_j) = 0$ dès que $i \neq j$. Donc dans la dernière somme, les seuls termes eventuellement non nuls sont ceux pour lesquels $i = j$ et il reste

$$\sum_{i=1}^{l} \lambda_i^2 b(e_i, e_i) = \sum_{i=1}^{l} \lambda_i^2 q(e_i).$$

$\square$

Lemme 4.6.3 (Théorème d'inertie de Sylvester)**.** *On suppose* $\dim(E) = n < +\infty$. *Soit q une forme quadratique. Soient $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases orthogonales. Alors*

$$\mathrm{card}\{e \in \mathcal{B} \mid q(e) > 0\} = \mathrm{card}\{e' \in \mathcal{B}' \mid q(e') > 0\},$$

et

$$\mathrm{card}\{e \in \mathcal{B} \mid q(e) < 0\} = \mathrm{card}\{e' \in \mathcal{B}' \mid q(e') < 0\}.$$

De plus si on note s et t ces deux nombres alors $\mathrm{rg}(q) = s + t$.

Démonstration. Notons $\mathcal{B}_{>0} = \{e \in \mathcal{B} \mid q(e) > 0\}$ et $\mathcal{B}'_{>0} = \{e \in \mathcal{B}' \mid q(e) > 0\}$. Notons s et s' leur cardinal respectif.
Notons $\mathcal{B}_{<0} = \{e \in \mathcal{B} \mid q(e) < 0\}$ et $\mathcal{B}'_{<0} = \{e \in \mathcal{B}' \mid q(e) < 0\}$. Notons t et t' leur cardinal respectif.

Montrons pour commencer que

$$s + t = \mathrm{rg}(q) = s' + t'.$$

$\mathcal{B}$ étant une base orthogonale, le rang de q est donné par le nombre de $e \in \mathcal{B}$ tels que $q(e) \neq 0$ (voir Cor. 4.2.5). Ce nombre est donc $s + t$. Il en est de même pour $\mathcal{B}'$ et on a $s + t = s' + t' = \mathrm{rg}(q)$.

Notons $\mathcal{B}'_{\leq 0} = \{e' \in \mathcal{B}' \mid q(e') \leq 0\}$ (c'est le complémentaire de $\mathcal{B}'_{>0}$ dans $\mathcal{B}'$).

Montrons que $\mathrm{Vect}(\mathcal{B}_{>0}) \cap \mathrm{Vect}(\mathcal{B}'_{\leq 0}) = \{0\}$. Par l'absurde, supposons qu'il existe $x \neq 0$ dans cette intersection.

Comme $x \in \mathrm{Vect}(\mathcal{B}_{>0})$, on peut écrire $x = \sum c_i e_i$ avec $c_i \in \mathbb{R}$ et $e_i \in \mathcal{B}_{>0}$. De plus comme $x \neq 0$, l'un des c_i est nécessairement non nul. Par le lemme précédent, on a $q(x) = \sum (c_i)^2 q(e_i)$. Dans cette somme, tous les $q(e_i)$ sont > 0 et l'un (au moins) des c_i est non nul donc $q(x) > 0$.

D'un autre côté, $x \in \mathrm{Vect}(\mathcal{B}'_{\leq 0})$ donc on peut écrire $x = \sum d_i e'_i$ avec $d_i \in \mathbb{R}$ et $e'_i \in \mathcal{B}'_{\leq 0}$. Appliquons encore une fois lemme précédent. On obtient $q(x) = \sum (d_i)^2 q(e'_i)$. Ici tous les $q(e'_i)$ sont ≤ 0 donc $q(x) \leq 0$. Contradiction. Ainsi $x = 0$.

En conséquence, les espace vectoriels $\mathrm{Vect}(\mathcal{B}_{>0})$ et $\mathrm{Vect}(\mathcal{B}'_{\leq 0})$ sont en somme directe. Considérons le sous-espace vectoriel de E :

$$\mathrm{Vect}(\mathcal{B}_{>0}) + \mathrm{Vect}(\mathcal{B}'_{\leq 0}) = \mathrm{Vect}(\mathcal{B}_{>0}) \oplus \mathrm{Vect}(\mathcal{B}'_{\leq 0}) \subseteq E.$$

Sa dimension est $s + (n - s')$ et inférieure ou égale à n. On en déduit que $s \leq s'$. Les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ jouent un rôle symétrique. Ainsi par symétrie, on a $s' \leq s$.

Ainsi $s = s'$. Or $s + t = \mathrm{rg}(q) = s' + t'$ d'où $t = t'$. $\square$

La proposition précédente nous permet de définir correctement la signature :

Définition 4.6.4. *Soit q une forme quadratique sur E (avec $\dim(E) < +\infty$). On définit la signature de q, notée $\mathrm{sign}(q)$ comme le couple (s,t) tel que : pour toute base orthogonale $\mathcal{B}$, $s = \mathrm{card}\{e \in \mathcal{B} \mid q(e) > 0\}$ et $t = \mathrm{card}\{e \in \mathcal{B} \mid q(e) < 0\}$.*

La proposition précédente nous dit que ce couple (s,t) ne dépend pas du choix d'une base orthogonale.

Proposition 4.6.5. *Soit q une forme quadratique sur E. Notons $n = \dim(E)$, $r = \mathrm{rg}(q)$, $(s,t) = \mathrm{sign}(q)$.*

(1) *q est positive $\iff t = 0 \iff r = s$.*

(2) *q est négative $\iff s = 0 \iff r = t$.*

(3) *q est définie-positive $\iff s = n$.*

(4) *q est définie-négative $\iff t = n$.*

Démonstration. En exercice. Quelques indications : considérer une base orthogonale $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_s, e_{s+1}, \ldots, e_{s+t}, e_{s+t+1}, \ldots, e_n)$ ordonneée en trois "paquets" de telle sorte que les e tels que $q(e) > 0$ sont en premiers (il y en a s), les e tels que $q(e) < 0$ sont "au milieu" (il y en a t) et les e tels que $q(e) = 0$ sont en dernier (il y en a $n - r$).

On voit que selons les cas (1), (2), (3) ou (4) certains de ces trois paquets peuvent être vides.

Pour $x \in E$, on écrit $x = \lambda_1 e_1 + \cdots \lambda_n e_n$ avec $\lambda_i \in \mathbb{R}$, on a : $q(x) = \lambda_1^2 q(e_1) + \cdots + \lambda_n^2 q(e_n)$.

On analyse chaque cas à l'aide de ces informations. $\square$

Définition 4.6.6.

– Un produit scalaire est une forme quadratique (ou une forme bilinéaire symétrique) définie-positive.
– un espace euclidien est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie muni d'un produit scalaire.

Ces notions de produit scalaire et d'espace euclidien sont normalement au programme de Math III. Cependant une fiche de TD (associée au cours de Math IV y est consacrée).

Proposition 4.6.7. *Soit q une forme quadratique sur E qui est de dimension finie n. Notons $(s,t) = \mathrm{sign}(q)$. Alors il existe une base $\mathcal{B}$ de E telle que*

$$\mathrm{Mat}(q,\mathcal{B}) = \begin{pmatrix} \mathrm{Id}_s & 0 & 0 \\ 0 & -\mathrm{Id}_t & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Démonstration. Soit $(e_1,\dots,e_s,e_{s+1},\dots,e_{s+t},e_{s+t+1},\dots,e_n)$ une base orthogonale de E ordonnée de sorte que $q(e_1),\dots,q(e_s) > 0$, $q(e_{s+1}),\dots,q(e_{s+t}) < 0$ et $q(e_{s+t+1}),\dots,q(e_n) = 0$ (certains "paquets" peuvent être vides). Soit

$$\mathcal{B} = (\frac{1}{\sqrt{q(e_1)}}\cdot e_1,\dots,\frac{1}{\sqrt{q(e_s)}}\cdot e_s,\frac{1}{\sqrt{-q(e_{s+1})}}\cdot e_{s+1},\dots,\frac{1}{\sqrt{-q(e_{s+t})}}\cdot e_{s+t},e_{s+t+1},\dots,e_n).$$

On verifie facilement que cette base est encore orthogonale.
Pour $1 \le i \le s$, $q(\frac{1}{\sqrt{q(e_i)}}\cdot e_i) = (\frac{1}{\sqrt{q(e_i)}})^2 q(e_i) = 1$.
Pour $s+1 \le i \le s+t$, $q(\frac{1}{\sqrt{-q(e_i)}}\cdot e_i) = (\frac{1}{\sqrt{-q(e_i)}})^2 q(e_i) = -1$.
Pour $s+t+1 \le i \le n$, $q(e_i) = 0$.
On obtient la matrice voulue. □

Corollaire 4.6.8. *Soit q une forme quadratique sur E qui est de dimension finie. Alors E admet une base orthonormale si et s. si q est définie-positive.*

Démonstration. En exercice. □

Corollaire 4.6.9. *Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie et q et q' deux formes quadratiques sur E. On a :*

$$q \sim q' \iff \mathrm{sign}(q) = \mathrm{sign}(q')$$

Démonstration. $\Rightarrow$: Soit $\mathcal{B}$ une base orthogonale pour q. Par le point (2) de la Prop. 4.4.4. Il existe une base $\mathcal{B}'$ telle que $\mathrm{Mat}(q,\mathcal{B}) = \mathrm{Mat}(q',\mathcal{B}')$.

La base $\mathcal{B}$ est orthogonale donc la matrice $\mathrm{Mat}(q,\mathcal{B})$ est diagonale. L'egalité ci-dessus entraine que la matrice $\mathrm{Mat}(q',\mathcal{B}')$ est diagonale et donc que la base $\mathcal{B}'$ est orthogonale pour q'.

Ainsi pour avoir la signature de q (resp. de q'), il suffit de compter le nombre d'éléments positifs et négatifs de la diagonale de $\mathrm{Mat}(q,\mathcal{B})$ (resp. de $\mathrm{Mat}(q',\mathcal{B}')$). Ces matrices étant égales, on obtient la même signature.

$\Leftarrow$: L'hypothèse $\mathrm{sign}(q) = \mathrm{sign}(q')$ et la proposition précédente entrainent qu'il existe des bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ telles que

$$\mathrm{Mat}(q,\mathcal{B}) = \begin{pmatrix} \mathrm{Id}_s & 0 & 0 \\ 0 & -\mathrm{Id}_t & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathrm{Mat}(q',\mathcal{B}').$$

Le point (2) de la proposition 4.4.4 entraine l'équivalence de q et q'.

□

4.7. **Formes bilinéaires antisymétriques sur $\mathbb{R}$.**

4.7.1. *Quelques généralités.* Ici $\mathbf{k}$ désigne un corps de caractéristique différente de 2.

Rappelons qu'une forme bilinéaire b sur E est dire antisymétrique si pour tous $x, y \in E$, $b(x,y) = -b(y,x)$.

Proposition 4.7.1. *Soit b une forme bilinéaire sur E. Les assertions suivantes sont équivalentes.*

(1) *b est antisymétrique.*

(2) *Pour tout $x \in E$, $b(x,x) = 0$.*

(3) *(pour E de dimension finie) Il existe une base $\mathcal{B}$ de E telle que* $\mathrm{Mat}(b, \mathcal{B})$ *est antisymétrique.*

(4) *(pour E de dimension finie) Pour toute base $\mathcal{B}$ de E,* $\mathrm{Mat}(b, \mathcal{B})$ *est antisymétrique.*

Démonstration. On ne démontre que (1) $\Longleftrightarrow$ (2). On laisse en exercice les deux autres équivalences. Supposons b antisymétrique. Alors pour tout $x \in E$, $b(x,x) = -b(x,x)$ i.e. $2b(x,x) = 0$ d'où $b(x,x) = 0$. (On remarquera que c'est ici qu'intervient l'hypothèse sur la caractéristique du corps $\mathbf{k}$, dans lequel $2 \neq 0$.)

Supposons l'assertion (2) vraie. Soient x, y deux éléments quelconque de E. Alors

$$b(x+y, x+y) = b(x,x) + b(x,y) + b(y,x) + b(y,y).$$

Or, par hypothèse, $b(x+y, x+y) = b(x,x) = b(y,y) = 0$, d'où $b(x,y) + b(y,x) = 0$ et la conclusion en découle. $\square$

4.7.2. *Réduction des formes bilinéaires antisymétriques sur* $\mathbb{R}$.

Théorème 4.7.2. *Soit E un espace vectoriel réel de dimension finie n. Soit b une forme bilinéaire antisymétrique sur E. Alors il existe une base $\mathcal{B}$ de E telle que*

$$\mathrm{Mat}(b, \mathcal{B}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ -1 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & & & & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & 0 & 1 & & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & -1 & 0 & & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & & & 0 & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & & & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

i.e. $\mathrm{Mat}(b, \mathcal{B})$ *est diagonale par blocs avec des blocs de taille* 2 *suivi de* 0.

La preuve de ce théorème va s'appuyer sur le cas particulier suivant.

Lemme 4.7.3. *Sous les hypothèses du théorème, supposons de plus que b est non dégénérée alors il existe une base $\mathcal{B}$ telle que* $\mathrm{Mat}(b, \mathcal{B})$ *est diagonale par blocs où les blocs sont* $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

Démonstration du Lemme. La démonstration se fait par récurrence sur la dimension de E. Supposons acquise la propriété pour tout espace dont la dimension est inférieure à celle de E.

La forme b étant non dégénérée, elle est nécessairement non nulle. Ainsi il existe $e, e' \in E$ (nécessairement non nuls) tels que $b(e, e') \neq 0$. Comme $b(e', e) = -b(e, e')$, on peut (qui à échanger les rôles de e et e') supposer $\lambda := b(e, e') > 0$. Soient alors $e_1 = \frac{1}{\sqrt{\lambda}} e$ et $e'_1 = \frac{1}{\sqrt{\lambda}} e'$. On a $b(e_1, e'_1) = 1$ et $b(e'_1, e_1) = -1$.

Montrons pour commencer que $\mathrm{Vect}(e_1, e'_1)$ est de dimension 2, i.e. e_1 et e'_1 sont linéairement indépendants. Soient $\alpha, \alpha' \in \mathbb{R}$ tels que $\alpha e_1 + \alpha' e'_1 = 0$. Alors $0 = b(e_1, \alpha e_1 + \alpha e'_1) = \alpha b(e_1, e_1) + \alpha' b(e_1, e'_1)$ or $b(e_1, e_1) = 0$ (car b est antisymétrique) et $b(e_1, e'_1) \neq 0$ d'où $\alpha' = 0$. De même en considérant $b(e'_1, \alpha e_1 + \alpha e'_1)$ on montre que $\alpha = 0$.

Considérons $F = \mathrm{Vect}(e_1, e'_1)^\perp$, i.e. $F = \{x \in E |\ b(x, e_1) = b(x, e'_1) = 0\}$.

Montrons que F et $\mathrm{Vect}(e_1, e'_1)$ sont en somme directe, i.e. sont d'intersection nulle. Soit, pour cela, $x \in F \cap \mathrm{Vect}(e_1, e'_1)$. On ecrit $x = \nu e_1 + \nu' e'_1$. On a $0 = b(x, e_1) = \nu b(e_1, e_1) + \nu' b(e'_1, e_1)$. Or $b(e_1, e_1) = 0$ et $b(e'_1, e_1) \neq 0$ d'où $\nu' = 0$. De même on montre que $\nu = 0$. On en déduit que $x = 0$ et la somme directe est acquise.

Comme b est non dégénérée, on a $\dim F + \dim \mathrm{Vect}(e_1, e'_1) = \dim E$ d'où

$$E = F \oplus \mathrm{Vect}(e_1, e'_1).$$

On aimerait appliquer l'hypothèse de récurrence à F. Pour cela il faut munir F d'une forme bilinéaire antisymétrique non dégénérée. Pour cela, considérons $b_{|F} : F \times F \to \mathbb{R}$ donnée par $b_{|F}(x, y) = b(x, y)$ pour tous $x, y \in F$. Il est facile de vérifier que cette application est une forme bilinéaire antisymétrique sur F. Montrons (car ce n'est pas immédiat) que $b_{|F}$ est non dégénérée.

Soit pour cela $x \in \ker(b_{|F})$. Cela signifie que pour tout $y \in F$, $b(x, y) = 0$. Comme $x \in F$, cela implique que pour tout $y \in \mathrm{Vect}(e_1, e'_1)$, $b(x, y) = 0$. Maintenant si y est un élément quelconque de E alors on peut l'écrire comme $y = f + z$ avec $f \in F$ et $z \in \mathrm{Vect}(e_1, e'_1)$ et par suite $b(x, y)$ sera nul. Cela montre donc que x appartient à $\ker(b)$ qui est nul par non dégénérescence de b. On peut conclure que $b_{|F}$ est non dégénérée.

Maintenant, nous sommes en mesure d'appliquer l'hypothèse de récurrence à $b_{|F}$. On obtient donc une base $\mathcal{B}_F = (e_2, e'_2, \ldots, e_m, e'_m)$ de F telle que $\mathrm{Mat}(b_{|F}, \mathcal{B}_F)$ soit de la forme voulue.

On considère alors $\mathcal{B} = \{e_1, e'_1\} \cup \mathcal{B}_F$. Du fait de la somme directe obtenue plus haut, on peut dire que la famille $\mathcal{B}$ est une base de E et la matrice de b dans cette base est de la forme voulue (<u>exercice</u> : justifier). □

Nous sommes en mesure de donner une

Démonstration du Théorème. Soit S un supplémentaire de $\ker(b)$. On montre facilement que S est orthogonal à $\ker(b)$ (en effet un vecteur quelconque du noyau est orthogonal à tout vecteur).

D'autre part, la restriction $b_{|S} : S \times S \to \mathbb{R}$ est non dégénérée : en effet, soit $s \in S$ dans le noyau de $b_{|S}$. Soit alors $x \in E$ un vecteur quelconque. Comme $E = S \oplus \ker(b)$ on peut écrire $x = y + z$ avec $y \in S$ et $z \in \ker(b)$. On a alors $b(s, x) = b(s, y) + b(s, z)$. Le premier terme est alors nul car $s \in \ker(b_{|S})$ et le second est nul car $z \in \ker(b)$. Comme bilan, on a $s \in S \cap \ker(b)$. Le vecteur s est donc nul.

On applique alors le lemme précédent à la forme bilinéaire antisymétrique $b_{|S}$ ce qui fournit une base $\mathcal{B}_S$ de S. De plus soit $\mathcal{B}'$ une base de $\ker(b)$ et enfin soit $\mathcal{B} = \mathcal{B}_S \cup \mathcal{B}'$. La famille $\mathcal{B}$ est alors une base de E (car $E = S \oplus \ker(b)$).

La matrice $\mathrm{Mat}(b, \mathcal{B})$ a la forme voulue (je laisse les détails en exercice). $\square$

Corollaire 4.7.4.

(1) *Toute forme bilinéaire et antisimétrique sur* $\mathbb{R}$ *est de rang pair.*

(2) *Toute matrice antisymétrique réelle est de rang pair.*

Démonstration. La preuve de (1) est une conséquence immédiate du théorème précédent. Voyons le point (2). Soit A une matrice antisymétrique réelle de taille $n \times n$.

Soit alors $b_A : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ donnée par $b_A(X, Y) = {}^tX \cdot A \cdot Y$.

Alors A est égale à la matrice de b_A dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$. Le rang de A est donc égal à celui de b_A qui est pair par le point (1). $\square$

Corollaire 4.7.5. *Soient* A *et* B *deux matrices antisymétriques réelles de même taille* $n \times n$. *Alors :*

$$A \text{ et } B \text{ sont congruentes} \iff \mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(B).$$

Démonstration. Considérons les formes bilinéaire sur $\mathbb{R}^n$ naturellement associées à A et B (voir la preuve précédente), qu'on note b_A et b_B. Notons $\mathcal{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

Supposons A et B congruentes. Alors il existe une matrice inversible P telle que $B = {}^tP \cdot A \cdot P$. Soit alors $\mathcal{B}'$ l'unique base telle que la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ soit P. On a alors $A = \mathrm{Mat}(b_A, \mathcal{B})$ et $B = \mathrm{Mat}(b_A, \mathcal{B}')$. On en déduit que $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(b_A) = \mathrm{rg}(B)$.

Supposons maintenant que A et B ont même rang. On applique le théorème précédent à b_A et b_B. Il existe donc deux bases $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$ deux $\mathbb{R}^n$ telles que $\mathrm{Mat}(b_A, \mathcal{B}_1)$ et $\mathrm{Mat}(b_B, \mathcal{B}_2)$ soient de la forme décrite dans le théorème. Notons M_A et M_B ces deux matrices.

D'autre part $A = \mathrm{Mat}(b_A, \mathcal{B})$ et $B = \mathrm{Mat}(b_B, \mathcal{B})$ (on rappelle que $\mathcal{B}$ est la base canonique) donc l'hypothèse implique que $\mathrm{rg}(b_A) = \mathrm{rg}(b_B)$ d'où l'on déduit que $\mathrm{rg}(M_A) = \mathrm{rg}(M_B)$. Vue la forme des matrices M_A et M_B, elles sont nécessairement égales.

Pour finir on a (par changement de base) : $A \sim M_A = M_B \sim B$. La transitivité de la congruence nous permet de conclure que $A \sim B$. $\square$

5. Diagonalisation des matrices symétriques réelles et forme quadratique sur un espace euclidien

5.1. **Diagonalisation des matrices réelles symétriques.** Pour commencer, faisons quelques "rappels" sur les espaces euclidiens.

(1) Un espace euclidien est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ de dimension finie et muni d'un produit scalaire (i.e. un forme bilinéaire symétrique (ou quadratique) définie-positive) noté généralement $\langle\ ,\ \rangle$.

(2) Exemple de base :
L'espace $\mathbb{R}^n$ muni du produit scalaire suivant (qu'on appellera produit scalaire canonique de $\mathbb{R}^n$) $\langle (x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n) \rangle = x_1y_1 + \cdots + x_ny_n$. On remarquera que $\langle (x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n) \rangle = {}^t(x_1, \dots, x_n) \cdot (y_1, \dots, y_n)$.

(3) Dans un espace euclidien, il existe toujours une base orthonormale (voir Cor. 4.6.8).

(4) Dans $\mathbb{R}^n$ muni du produit scalaire canonique, la base canonique est une base orthonormale.

(5) Soit E est un espace euclidien (de dimension n) et soit $\mathcal{B}$ une base orthonormale.

Pour $x, y \in E$, on note $X, Y \in \mathbb{R}^n$ les vecteurs coordonnées de x et y respectivement dans la base $\mathcal{B}$. Alors $\langle x, y\rangle = {}^tX \cdot Y$. (C'est trivial lorsqu'on se souvient que $\langle x, y\rangle = {}^tX \cdot \mathrm{Mat}(\langle,\rangle, \mathcal{B}) \cdot Y$ et que $\mathrm{Mat}(\langle,\rangle, \mathcal{B})$ est la matrice identitée.)

Dans la suite du §, E désignera un espace euclidien de dimension finie n muni d'un produit scalaire $\langle\ ,\ \rangle$.

Définition 5.1.1. *Soit f un endomorphisme de E. On dit que f est auto-adjoint s'il est égal à son propre adjoint $f^\star$. Autrement dit pour tous $x, y \in E$,*

$$\langle f(x), y\rangle = \langle x, f(y)\rangle.$$

Lemme 5.1.2. *Soit $\mathcal{B}$ une base orthonormale de E. Alors :*

$$f \text{ est auto-adjoint} \iff mat(f, \mathcal{B}) \text{ est symétrique}$$

Démonstration. Notons $M = \mathrm{Mat}(f, \mathcal{B})$. Pour $x, y \in E$, on notera $X, Y \in \mathbb{R}^n$ les vecteurs coordonnées dans $\mathcal{B}$. On a trivialement la suite d'équivalences suivantes.

$$\begin{aligned} \langle f(x), y\rangle = \langle x, f(y)\rangle &\iff {}^t(MX)Y = {}^tX \cdot MY \\ &\iff {}^tX \cdot {}^tM \cdot M = {}^tX \cdot M \cdot Y \end{aligned}$$

Maintenant, f est auto-adjoint ssi pour tous $x, y \in E$, ces égalités ont lieu ce qui équivaut à les avoir pour tous $X, Y \in \mathbb{R}^n$ ce qui équivaut à avoir ${}^tM = M$ (voir Lemme 3.2.1). □

Théorème 5.1.3. *Soit f un endomorphisme de E. On suppose f auto-adjoint. Alors :*

(1) *f est diagonalisable.*

(2) *Les sous-espaces propres de f sont deux à deux orthogonaux*

Conséquence directe : il existe une base orthonormale de E formée de vecteurs propres.

En effet dans chaque espace propre E_{λ_i} on fixe une base orthonormale $\mathcal{B}_i$ (c'est possible car E_{λ_i} est un espace euclidien pour le produit scalaire restreint). La réunion des $\mathcal{B}_i$ est alors une base orthonormale de E constituée de vecteurs propres.

Avant la démonstration du théorème, démontrons le corollaire suivant.

Corollaire 5.1.4. *Toute matrice symétrique réelle est diagonalisable et ses espaces propres sont deux à deux orthogonaux (pour le produit scalaire canonique de $\mathbb{R}^n$).*

Démonstration. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ un matrice symétrique. Soit $\mathcal{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$. Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ donné par $f(X) = M \cdot X$. Ainsi f est un (l'unique) endomorphisme tel que $\mathrm{Mat}(f, \mathcal{B}) = M$. La base $\mathcal{B}$ étant orthonormale pour le produit scalaire canonique de $\mathbb{R}^n$, le lemme 5.1.2 s'applique et f est auto-adjoint. On lui applique alors le théorème précédent. □

Démonstration du Théorème. Nous allons commencer par démontrer le point (1) en plusieurs étapes dont voici la première.

(1) Montrons que le polynôme caractéristique de f est scindé sur $\mathbb{R}$.
Pour cela, soit $\mathcal{B}$ une base orthonormale $\mathcal{B}$ et considérons $M = \mathrm{Mat}(f, \mathcal{B})$ et montrons que les valeurs propres de M (a priori dans $\mathbb{C}$) sont réelles. Notons en passant que M est symétrique par le lemme 5.1.2.

Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ une valeur propre de M (i.e. une racine complexe du polynôme caractéristique de M, ce dernier étant bien entendu le polynôme caractéristique de f). Soit $X = {}^t(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{C}^n$ un vecteur colonne non nul tel que

$$(\star) \qquad M \cdot X = \lambda X,$$

autrement dit un vecteur propre de M. En conjuguant $(\star)$ on obtient

$$(\star') \qquad M \cdot \bar{X} = \bar{\lambda}\bar{X},$$

ceci car M est à coefficients réels. En utilisant les égalités ci-dessus on obtient la suite d'égalités suivantes :

$$\begin{aligned}
\lambda(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2) &= {}^t(\lambda X) \cdot \bar{X} \\
&= {}^t(M \cdot X) \cdot \bar{X} \text{ par } (\star) \\
&= {}^tX \cdot {}^tM \cdot \bar{X} \\
&= {}^tX \cdot M \cdot \bar{X} \text{ car } M \text{ est symétrique} \\
&= {}^tX \cdot (\bar{\lambda}\bar{X}) \text{ par } (\star') \\
&= \bar{\lambda}(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2).
\end{aligned}$$

Ainsi

$$(\lambda - \bar{\lambda}) \cdot (\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2) = 0$$

or X est un vecteur non nul donc la somme des $|x_i|^2$ est non nulle et donc $\lambda - \bar{\lambda} = 0$ i.e. λ est réel.

(2) Montrons par récurrence sur la dimension de E que f est diagonalisable (i.e. E admet une base de vecteurs propres). Si $\dim(E) = 1$ c'est trivial. Supposons la propriété vraie pour tout espace vectoriel de dimension strictement inférieure à $\dim(E)$.

Soit λ une valeur propre de f et soit $x \in E \setminus \{0\}$ un vecteur propre associé. Soit alors $H = \mathrm{Vect}\{x\}^{\perp}$ l'orthogonal de x, i.e. l'ensemble $\{y \in E \mid \langle x, y\rangle = 0\}$. Le produit scalaire étant non dégénéré on peut dire que $\dim(E) = \dim(H) + \dim(\mathrm{Vect}\{e\})$, i.e. $\dim(H) = n - 1$. On aimerait appliquer l'hypothèse de récurrence à H. Pour cela nous devons montrer que H est stable par f et qu'on obtient un endomorphisme auto-adjoint de H.

(a) H est stable par f.
En effet si $y \in H$ alors $\langle f(y), x\rangle = \langle y, f(x)\rangle = \langle y, \lambda x\rangle = \lambda\langle y, x\rangle = 0$ donc $f(y) \in H$.

(b) Puisque H est stable par f on peut définir $\tilde{f} : H \to H$ donné par $\tilde{f}(y) = f(y)$ pour tout $y \in H$. On peut montrer que $\tilde{f}$ est auto-adjoint pour la restriction du produit scalaire à H (exercice trivial).

(3) Nous sommes en mesure d'appliquer l'hypothèse de récurrence à $\tilde{f}$. Il existe donc une base $\mathcal{B}_F$ de F constituée de vecteurs propres pour $\tilde{f}$, donc de vecteurs propre de E.

Notons $\mathcal{B} = \{x\} \cup \mathcal{B}_F$. Si nous montrons que la famille $\mathcal{B}$ est libre alors ce sera une base de E constituée de vecteurs propres pour f et f sera bien diagonalisable. Pour cela il suffit de montrer que la famille $\mathcal{B}$ est libre (car son cardinal est égal à $\dim(E)$).

Par l'absurde, supposons que $x \in H$. Mais alors $\langle x, x\rangle = 0$ or un produit scalaire est une forme bilinéaire qui est définie ce qui entraine $x = 0$ ce qui est absurde. La famille est donc bien libre.

Le point (1) du théorème est démontré. Occupons-nous du point (2). Nous devons montrer que les sous-espaces propres sont othogonaux entre eux deux à deux.

Soient donc λ_1 et λ_2 deux valeurs propres distinctes et soient v_1 et v_2 deux vecteurs propres respectifs, le but étant de montrer que v_1 et v_2 sont orthogonaux. Nous avons

$$\begin{aligned}
\lambda_1 \cdot \langle v_1, v_2\rangle &= \langle \lambda_1 v_1, v_2\rangle \\
&= \langle f(v_1), v_2\rangle \\
&= \langle v_1, f(v_2)\rangle \text{ car } f \text{ est auto-adjoint} \\
&= \langle v_1, \lambda_2 v_2\rangle \\
&= \lambda_2 \cdot \langle v_1, v_2\rangle.
\end{aligned}$$

Ainsi $(\lambda_1 - \lambda_2) \cdot \langle v_1, v_2\rangle = 0$ or $\lambda_1 \neq \lambda_2$ donc $\langle v_1, v_2\rangle = 0$. □

5.2. **Forme quadratique sur un espace euclidien.**

Théorème 5.2.1. *Soit $(E, \langle,\rangle)$ un espace euclidien et soit q une forme quadratique sur E. Il existe une base de E qui est à la fois orthonormale pour $\langle,\rangle$ et orthogonale pour q.*

Démonstration. La preuve se fait en plusieurs étapes.

(1) Notons $n = \dim(E)$ Notons b la forme polaire associée à q.
Affirmation. Il existe un unique endomorphisme f de E tel que :

$$\forall x, y \in E, \quad \langle x, f(y)\rangle = b(x, y).$$

Commençons par l'existence. Soit $\mathcal{B}$ une base orthonormale de E pour $\langle,\rangle$. Soit $B = \mathrm{Mat}(b, \mathcal{B})$. Soit alors f l'unique endomorphisme de E tel que $\mathrm{Mat}(f, \mathcal{B}) = B$. Pour $x, y \in E$, notons $X, Y \in \mathbb{R}^n$ leurs vecteurs coordonnées respectifs. On a alors :

$$\langle x, f(y)\rangle = {}^tX \cdot (B \cdot Y) = b(x, y).$$

Montrons l'unicité. Soient f, f' deux endomorphismes tels que pour tous $x, y \in E$, $\langle x, f(y)\rangle = b(x, y) = \langle x, f'(y)\rangle$. Alors $\langle x, (f - f')(y)\rangle = 0$. Ainsi pour tout y fixé, $(f - f')(y) \in \ker(\langle,\rangle)$. Mais ce noyau est nul donc pour tout $y \in E$, $f(y) - f'(y) = 0$.

(2) Montrons que f est auto-adjoint pour $\langle , \rangle$.
Pour $x, y \in E$, on a $\langle f(x), y\rangle = \langle y, f(x)\rangle$ par symétrie du produit scalaire. Ensuite ceci est égal à $b(y, x)$ puis à $b(x, y)$ par symétrie de b et enfin à $\langle x, f(y)\rangle$.

(3) On peut appliquer le théorème 5.1.3. Soit donc $(b_1, \ldots, b_n)$ une base de vecteurs propres pour f et qui est orthonormale pour $\langle , \rangle$.

Pour conclure, il suffit de montre que la base est orthogonale pour q. Soient donc b_i, b_j deux éléments distincts de notre base. Notons λ_j la valeur propre associée à b_j. On a donc :

$$b(b_i, b_j) = \langle b_i, f(b_j)\rangle = \langle b_i, \lambda_j \cdot b_j\rangle = \lambda_j \cdot \langle b_i, b_j\rangle = 0.$$

□

Corollaire 5.2.2. *Soit B une matrice symétrique réelle alors il existe une matrice inversible P de même taille que B telle que $P^{-1} = {}^tP$ et $P^{-1}BP$ soit diagonale.*

Dans le chapitre suivant on fera l'étude des matrices P telles que $P^{-1} = {}^tP$.

Démonstration. Notons n la taille de la matrice B. Sur $\mathbb{R}^n$, on note $\langle , \rangle$ le produit scalaire canonique. On note $\mathcal{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$. On définit q comme l'unique forme quadratique de $\mathbb{R}^n$ telle que $\mathrm{Mat}(q, \mathcal{B}) = B$ (i.e. q est telle que $q(X) = {}^tXBX$ pour tout $X \in \mathbb{R}^n$).

Par le théorème précédent, il existe une base $\mathcal{B}'$ qui est orthonormale pour $\langle , \rangle$ et orthogonale pour q.

Notons $P = \mathrm{Passage}(\mathcal{B} \to \mathcal{B}')$. Par la formule de changement de bases pour les formes bilinéaires on a ${}^tPBP = \mathrm{Mat}(q, \mathcal{B}')$. De plus cette matrice est diagonale car $\mathcal{B}'$ est q-orthogonale.

Il reste à voir que $P^{-1} = {}^tP$ ou encore que ${}^tP \cdot P = \mathrm{Id}$.

Notons $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ et $\mathcal{B}' = (e'_1, \ldots, e'_n)$. Par définition de P on a $Pe_i = e'_i$ pour tout $i = 1, \ldots, n$. Comme $\mathcal{B}'$ est orthonormale pour le produit scalaire, on a pour tous i, j, $\langle e'_i, e'_j\rangle = \delta_{ij}$. Autrement dit pour tous i, j,

$$\delta_{ij} = \langle e'_i, e'_j\rangle = {}^t(Pe_i) \cdot Pe_j = {}^te_i \cdot ({}^tP \cdot P) \cdot e_j.$$

Or pour une matrice carrée quelconque $M = (m_{ij})$, ${}^te_i \cdot M \cdot e_j$ n'est rien d'autre que le coefficient m_{ij}. Ainsi la matrice ${}^tP \cdot P$ est la matrice identitée. □

Le corollaire suivant est utile dans la pratique car il permet d'obtenir la signature d'une forme quadratique sans avoir à orthogonaliser par la méthode de Gauss.

Corollaire 5.2.3. *Soit q une forme quadratique sur un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie. Soit $\mathcal{B}$ une base quelconque de l'espace et soit $B = \mathrm{Mat}(q, \mathcal{B})$. Alors la signature de q est égal au couple (s, t) où s est le nombre de valeurs propres strictement positives de B et t le nombre de celles qui sont strictement négatives.*

Démonstration. La matrice B est évidemment symétrique. On peut donc lui appliquer le corollaire précédent et on obtient une matrice P inversible telle que $P^{-1} = {}^tP$ et $P^{-1}BP$ est diagonale. Notons D cette matrice diagonale.

Soit $\mathcal{B}'$ l'unique base telle que $\mathrm{Passage}(\mathcal{B} \to \mathcal{B}') = P$. Alors

$$\mathrm{Mat}(q, \mathcal{B}') = {}^tPBP = P^{-1}BP = D.$$

Ainsi la base $\mathcal{B}'$ est q-orthogonale donc obtenir la signature de q consiste à compter le nombre de coefficients positifs et négatifs de la diagonale de D.

Or l'égalité $P^{-1}BP = D$ nous dit que ces coefficients sont les valeurs propres de B. $\square$

6. Groupe orthogonal

6.1. **Groupe orthogonal d'un espace euclidien.** Dans ce §, $(E, \langle , \rangle)$ désigne un espace euclidien de dimension n.

Définition 6.1.1. *Soit f un endomorphisme de E. On dit que f est orthogonal (ou bien f est une isométrie vectorielle) si pour tous $x, y \in E$,*

$$\langle f(x), f(y)\rangle = \langle x, y\rangle.$$

On note $\mathcal{O}(E)$ l'ensemble des endomorphismes orthogonaux de E.

Rappel (voir ex. 6 TD 5).
Soit $(E, \langle , \rangle)$ un espace euclidien. Pour $x \in E$, on pose $\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$. Alors $(E, \|\|)$ est un espace vectoriel normé.
Exemple : Si on munit $\mathbb{R}^n$ du produit scalaire canonique alors la norme induite est la norme euclidienne : $\|(x_1, \dots, x_n)\| = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}$.

Proposition 6.1.2. *Soit f un endomorphisme de E. On a les équivalences suivantes.*

(1) *f est orthogonal.*
(2) *$f^* \circ f = \mathrm{Id}_E$.*
(3) *Pour tout $x \in E$, $\|f(x)\| = \|x\|$ où $\|\|$ désigne la norme induite par le produit scalaire de E.*
(4) *Soient $\mathcal{B}$ une base orthonormale de E et $M = \mathrm{Mat}(f, \mathcal{B})$. Alors ${}^tM \cdot M = \mathrm{Id}_n$.*

Remarque. C'est le point (3) qui fait qu'on parle d'isométrie vectorielle.

Démonstration. Supposons (1).
Pour tout $x, y \in E$, on a :

$$\begin{aligned}\langle x, (f^* \circ f - \mathrm{Id}_E)(y)\rangle &= \langle x, f^*(f(y)) - y\rangle \\ &= \langle x, f^*(f(y))\rangle - \langle x, y\rangle \\ &= \langle f(x), f(y)\rangle - \langle x, y\rangle \\ &= 0\end{aligned}$$

Ainsi pour tout y fixé, $(f^* \circ f - \mathrm{Id}_E)(y)$ est dans $\ker(\langle , \rangle)$. Mais ce noyau est trivial donc $(f^* \circ f - \mathrm{Id}_E)(y) = 0$. On obtient (2).
Supposons (2).
Pour tout $x \in E$, $\langle x, x\rangle = \langle x, f^*(f(x))\rangle = \langle f(x), f(x)\rangle$. En prenant la racine carrée on obtient (3).
Supposons (3) et montrons (1).
Pour tout $x \in E$, nous avons $\sqrt{\langle f(x), f(x)\rangle} = \sqrt{\langle x, x\rangle}$. Or un produit scalaire est une forme bilinéaire positive donc cette égalité est conservée si on l'élève au carré donc pour tout $x \in E$, $\langle f(x), f(x)\rangle = \langle x, x\rangle$. La relation suivante qui lie une forme quadratique à sa forme polaire nous donne immédiatement (1) : $\langle x, y\rangle = \frac{1}{2}(\langle x + y, x + y\rangle - \langle x, x\rangle - \langle y, y\rangle)$ pour tous $x, y \in E$.
Pour le moment, nous avons démontré les équivalences : (1) $\iff$ (2) $\iff$ (3).

Pour finir nous allons montré que : (2) $\iff$ (4). Soit $\mathcal{B}$ une base orthonormale de E. Notons M et M^* les matrices respectives de f et f^* dans $\mathcal{B}$. Nous avons de manière triviale l'équivalence suivante : $f^* \circ f = \mathrm{Id}_E \iff M^* \cdot M = \mathrm{Id}_n$. Pour avoir l'équivalence (2) $\iff$ (4), il suffit donc de montrer que $M^* = {}^tM$.

D'après la remarque 3.6.10, $M^* = B^{-1} \cdot {}^tM \cdot B$ où B est la matrice du produit scalaire dans la base $\mathcal{B}$. Or la base $\mathcal{B}$ est orthonormale donc $B = \mathrm{Id}_n$ et on obtient bien $M^* = {}^tM$. □

Remarque 6.1.3. (1) *Tout endomorphisme orthogonal est un isomorphisme.*

(2) *Si f est orthogonal alors* $\det(f) \in \{1, -1\}$.
En effet, en utilisant le (4) de la proposition précédente, on obtient $(\det(f))^2 = (\det(M))^2 = \det({}^tM)\det(M) = \det({}^tM \cdot M) = \det(\mathrm{Id}_n) = 1$.

(3) *Si f est orthogonal alors f^{-1} également.*
En effet, soient $x, y \in E$. Soient $x' = f^{-1}(x)$ et $y' = f^{-1}(y')$. Alors

$$\langle f^{-1}(x), f^{-1}(y)\rangle = \langle x', y'\rangle = \langle f(x'), f(y')\rangle = \langle x, y\rangle.$$

(4) *Si f et g sont deux endomorphismes orthogonaux alors $f \circ g$ l'est aussi.* *Exercice.*

(5) *Par (3) et (4), on voit que $\mathcal{O}(E)$ est un sous-groupe du groupe des automorphisme de E. On l'appelle* **groupe orthogonal de** E.

(6) *Étant donné f orthogonal, on dit que f est (une isométrie) directe si* $\det(f) = 1$ *et indirecte si* $\det(f) = -1$.

Proposition 6.1.4. *Soit f un endomorphisme.*

(1) *Si f est orthogonal et si $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ est une base orthonormale de E alors $f(\mathcal{B}) = (f(e_1), \ldots, f(e_n))$ est une base orthonormale.*

(2) *Supposons qu'il existe une base $\mathcal{B}$ orthonormale telle que $f(\mathcal{B})$ soit une famille orthonormale alors f est orthogonale.*

Démonstration. (1) Il est bien connu (Math II ?) que l'image d'une base par un isomorphisme est une base. Si ce n'est pas connu, le faire en exercice. Il reste donc à vérifier que $f(\mathcal{B})$ est orthonormale. On a $\langle f(e_i), f(e_j)\rangle = \langle e_i, e_j\rangle = \delta_{ij}$ d'où la conclusion.

(2) L'hypothèse dit qu'il existe une base orthonormale $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ de E telle que $f(\mathcal{B}) = (f(e_1), \ldots, f(e_n))$ est une famille orthonormale. Soient $x, y \in E$. Soient $x_i, y_i \in \mathbb{R}$ tels que $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$ et $y = \sum_{i=1}^n y_i e_i$. On a

alors :

$$\begin{aligned}
\langle f(x), f(y)\rangle &= \langle \sum_{i=1}^{n} x_i f(e_i), \sum_{j=1}^{n} y_j f(e_j)\rangle \\
&= \sum_{1\leq i,j\leq n} x_i y_j \langle f(e_i), f(e_j)\rangle \\
&= \sum_{1\leq i,j\leq n} x_i y_j \delta_{ij} \text{ par hypothèse} \\
&= \sum_{1\leq i,j\leq n} x_i y_j \langle e_i, e_j\rangle \text{ car } \mathcal{B} \text{ est orthonormale} \\
&= \langle \sum_{i=1}^{n} x_i e_i, \sum_{j=1}^{n} y_j e_j\rangle = \langle x, y\rangle.
\end{aligned}$$

On en conclut que f est orthogonale.

□

6.2. **Groupe orthogonal.**

Définition 6.2.1. *Une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est dite orthogonale si ${}^tA \cdot A = \mathrm{Id}_n$. On note $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices orthogonales de taille n.*

Remarque 6.2.2.

(1) $\mathrm{Id}_n \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$.

(2) *Si $A, B \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ alors $A \cdot B \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$.*

(3) *Si $A \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ alors A est inversible et $A^{-1} \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$.*

Je laisse ces points en exercice.

Ainsi de cette remarque on peut dire que $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ est un sous-groupe du groupe $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ des matrices inversibles de taille $n \times n$. **L'ensemble $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ est appelé n-ième groupe orthogonal.**

Proposition 6.2.3. *Soit $(E, \langle,\rangle)$ un espace euclidien. Soient, dans E, deux bases orthonormales $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$. Alors la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ est une matrice orthogonale.*

Démonstration. Notons A la matrice de passage en question. Notons $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ et $\mathcal{B}' = (e'_1, \ldots, e'_n)$. Soit f l'unique endomorphisme de E tel que pour tout $i = 1, \ldots, n$, $f(e_i) = e'_i$. Par le (2) de la Proposition 6.1.4, l'endomorphisme f est orthogonal. D'autre part A est égal à $\mathrm{Mat}(f, \mathcal{B})$. Par le (4) de la Proposition 6.1.2, la matrice A est orthogonale. □

Proposition 6.2.4. *Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Alors A est orthogonale si et s. si les vecteurs colonnes de A forment une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$ pour le produit scalaire canonique.*

Démonstration. Notons $\mathcal{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$. Rappelons que c'est une base orthonormale de $\mathbb{R}^n$ pour le produit scalaire canonique de $\mathbb{R}^n$.

Soit f l'unique endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ tel que $\mathrm{Mat}(f, \mathcal{B}) = A$.

Supposons que $A \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$. Par le (4) de la Proposition 6.1.2, l'endomorphisme f est orthogonal. Par la proposition 6.1.4, l'ensemble $\{f(e) | e \in \mathcal{B}\}$ est une base orthonormale de $\mathbb{R}^n$. Mais c'est ensemble n'est rien d'autre que l'ensemble des colonnes de la matrice A, d'où la conclusion.

Réciproquement, supposons que les vecteurs colonnes de A forment une base orthonormale de $\mathbb{R}^n$. Sachant que ces vecteurs sont les images des vecteurs de $\mathcal{B}$ par f, on en déduit que f envoie la base orthonormale $\mathcal{B}$ sur une base orthonormale. On utilise comme précédemment les Propositions 6.1.4 et 6.1.2. $\square$

6.3. **Endomorphismes orthogonaux en dimension 2 : Isométries d'un plan vectoriel.**

Ici on s'intéresse aux endomorphismes orthogonaux sur un espace euclidien de dimension 2.

Pour $\theta \in \mathbb{R}$, notons R_θ et S_θ les matrices suivantes :

$$R_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}, \qquad S_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}.$$

On remarque que ces deux matrices sont orthogonales, que la première est de déterminant 1 (elle est directe) et la seconde de déterminant -1 (elle est indirecte).

<u>Interpretation géométrique.</u>
Notons r_θ et s_θ les endomorphismes de $\mathbb{R}^2$ tels que $r_\theta(v) = R_\theta \cdot v$ et $s_\theta(v) = S_\theta \cdot v$.

Ainsi ce sont les endomorphismes de $\mathbb{R}^2$ dont la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$ est respectivement R_θ et S_θ. Notons $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$.

Alors r_θ n'est rien d'autre que la rotation de centre 0 et d'angle θ. On remarquera que si θ est égal à π (modulo 2π) alors r_θ est la symétrie centrale de centre 0.

D'autre part on remarque que $S_\theta = R_\theta \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Notons S la matrice diagonale dans ce produit. Cette matrice est celle de la symétrie orthogonale d'axe (Ox) dans la base $\mathcal{B}$. Ainsi s_θ est la composée d'une symétrie orthogonale et d'une rotation.

Proposition 6.3.1. *Soit $(E, \langle,\rangle)$ un espace euclidien de dimension 2 et soit f un endomorphisme orthogonal de E. Alors*

(1) *Si f est direct alors pour toute base orthonormale $\mathcal{B}$ de E il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $\mathrm{Mat}(f, \mathcal{B}) = R_\theta$.*
(2) *Si f est indirect alors pour toute base orthonormale $\mathcal{B}$ de E il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $\mathrm{Mat}(f, \mathcal{B}) = S_\theta$.*

Démonstration. Soit $\mathcal{B}$ une base orthonormée quelconque de E. Notons $A = \mathrm{Mat}(f, \mathcal{B})$. D'après la proposition 6.2.4, les vecteurs colonnes $C_1 = \binom{x_1}{y_1}$ et $C_2 = \binom{x_2}{y_2}$ forment une base orthonormale de $\mathbb{R}^2$ pour le produit scalaire canonique. Ainsi ils sont de norme 1 et orthogonaux entre eux. Il existe donc $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $C_1 = \binom{\cos\theta}{\sin\theta}$ (ceci car C_1 est de norme 1). De plus comme C_2 et de norme 1 et orthogonale à C_1, on a

$$C_2 = \begin{pmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix} \text{ ou bien } C_2 = \begin{pmatrix} \sin\theta \\ -\cos\theta \end{pmatrix}.$$

Le determinant de f (i.e. de A) nous permet de choisir à quoi est égal C_2. $\square$

Remarque 6.3.2. *Plaçons nous, pour simplifier les choses, dans le cas où f est direct (i.e. de determinant 1). Peut-on dire qu'il y a unicité de θ dans la proposition précédente ? Autrement dit, si $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ sont deux bases orthonormales E et si θ et θ' sont tels que $\mathrm{Mat}(f,\mathcal{B}) = R_\theta$ et $\mathrm{Mat}(f,\mathcal{B}') = R_{\theta'}$ alors est-ce que $\theta = \theta'$?*

La réponse est non. Prenons par exemple l'endomorphisme r_θ de $\mathbb{R}^2$ considéré plus haut. Notons $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$ et soit $\mathcal{B}' = (e_2, e_1)$. Ces bases ont les mêmes vecteurs. On aura $\mathrm{Mat}(r_\theta,\mathcal{B}) = R_\theta$ alors que $\mathrm{Mat}(r_\theta,\mathcal{B}') = R_{-\theta}$.

Cette question sur l'unicité de θ est liée à une histoire d'orientation. Ainsi $\mathcal{B}$ est une base directe alors $\mathcal{B}'$ est une base indirecte. Dans $\mathbb{R}^2$, on peut parler de base directe ou indirecte mais dans un espace euclidien quelconque il n'y a pas d'orientation naturelle.

6.4. **Réduction des endomorphismes orthogonaux.** Ici, sauf mention contraire, $(E, \langle,\rangle)$ désigne un espace euclidien de dimension n.

Lemme 6.4.1. *Soit f un endomorphisme orthogonal de E. Toute valeur propre de f (si f en possède) appartient à $\{-1, 1\}$.*

Remarquons que f peut ne pas avoir de valeurs propres : par exemple les endomorphismes r_θ et s_θ du paragraphe précédent ont des valeurs propres si et s. si θ est égal à π modulo 2π.

Démonstration. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ une valeur propre de f et soit $v \in E$ un vecteur propre associé. On a $f(v) = \lambda v$. En appliquant la norme à cette égalité on obtient :

$$\|v\| = \|f(v)\| = \|\lambda v\| = |\lambda| \cdot \|v\|$$

(la première égalité venant de l'orthogonalité de f). Or $v \neq 0$ donc $\|v\| \neq 0$ donc $|\lambda| = 1$ et donc $\lambda \in \{-1, 1\}$. □

Remarquons que si $\dim E$ est impaire alors f admet une valeur propre (car le polynôme caractéristique de f est alors de degré impaire et possède donc une racine réelle).

Le lemme suivant est un résultat technique qu'on utilisera dans la démonstration de la proposition suivante.

Lemme 6.4.2. *Soit f un endomorphisme orthogonal de E. Supposons que f ne possède pas de valeurs propres. Alors il existe un sous-espace vectoriel F de E tel que :*
- $\dim F = 2$,
- $E = F \oplus F^\perp$,
- $f(F) \subseteq F$ *et* $f_{|F} : F \to F$ *est orthogonal direct,*
- $f(F^\perp) \subseteq F^\perp$.

Démonstration. Implicitement on suppose $E \neq \{0\}$. Soit $g = f + f^* = f + f^{-1}$. On a $g^* = (f + f^*)^* = f^* + (f^*)^* = f^* + f = g$. Ainsi g est auto-adjoint. Donc g est diagonalisable. En particulier, g possède (au moins) une valeur propre. Notons là λ. Soit v un vecteur propre associé. On a $f(\lambda v) = f(g(v)) = f(f + f^{-1}(v)) = f^2(v) + v$. Ainsi on a

$$f^2(v) = -v + \lambda f(v).$$

Notons $F = \mathrm{Vect}(v, f(v))$. Cet espace est de dimension 2 car sinon $f(v)$ serait colinéaire à v, i.e. v serait un vecteur propre de f ce qui est absurde.

D'autre part $E = F \oplus F^{\perp}$. Ce résultat est général pour une forme bilinéaire non dégénérée. Je laisse les détails en exercice.

Vérifions que $f(F) \subseteq F$. Pour cela il suffit de montrer que $f(v) \in F$ et $f(f(v)) \in F$. Pour $f(v)$ c'est le cas par définition de F. D'autre part, $f(f(v))$ est égal à $-v + \lambda f(v)$ d'où $f(f(v)) \in F$.

Ainsi on peut considérer la restriction $f_{|F} : F \to F$. Le produit scalaire $\langle , \rangle$ de E induit par restriction un produit scalaire sur F. On vérifie trivialement que $f_{|F}$ est orthogonal.

Vérifions que $\det(f_{|F}) = 1$. Le couple $(v, f(v))$ est une base de F. Ainsi $\det(f_{|F})$ est égal à

$$\det(\mathrm{Mat}(f_{|F}, (v, f(v)))) = \det \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & \lambda \end{pmatrix} = 1.$$

Pour finir, vérifions que $f(F^{\perp}) \subseteq F^{\perp}$. Soit $x \in F^{\perp}$, i.e. $x \perp v$ et $x \perp f(v)$, et montrons que $f(x) \in F^{\perp}$. On a : $\langle f(x), v\rangle = \langle x, f^*(v)\rangle = \langle x, f^{-1}(v)\rangle$. $f_{|F}$ est un endomorphisme orthogonal de F, c'est donc un isomorphisme de F donc $f^{-1}(v) \in F$. Or $x \perp F$ donc $\langle x, f^{-1}(v)\rangle = 0$. Ainsi $f(x) \perp v$.

Enfin $\langle f(x), f(v)\rangle = \langle x, v\rangle$ car f est auto-adjoint et $\langle x, v\rangle = 0$ par hypothèse. On a bien $f(x) \perp f(v)$. □

Proposition 6.4.3. *Soit f un endomorphisme orthogonal de E. Alors il existe une base orthonormale $\mathcal{B}$ de E telle que* $\mathrm{Mat}(f, \mathcal{B})$ *soit diagonale par blocs, de la forme* $\mathrm{Diag}(1, \ldots, 1, -1, \ldots, -1, R_{\theta_1}, \ldots, R_{\theta_p})$ *où* $R_{\theta_i} = \begin{pmatrix} \cos\theta_i & -\sin\theta_i \\ \sin\theta_i & \cos\theta_i \end{pmatrix}$.

Démonstration. La preuve se fera par récurrence sur la dimension de E. Si $\dim E = 1$ alors f est diagonalisable avec pour unique valeur propre 1 ou -1. Supposons que pour tout espace euclidien de dimension$< \dim E$, la proposition est vraie. On traite deux cas :

- Si f admet une valeur propre λ. Soit alors v un vecteur propre associé. Soit $F = \mathrm{Vect}(v)$. On a alors $E = F \oplus F^{\perp}$ et $\mathrm{Mat}(f_{|F}, \{v\})$ est égal (1) ou (-1). On montre facilement que $f(F^{\perp}) \subset F^{\perp}$. Notons $\mathcal{B}_F = \{v\}$.
- Si f n'a pas de valeurs propres. On applique le lemme précédent. On obtient alors $E = F \oplus F^{\perp}$. On peut alors appliquer la proposition 6.3.1 à l'endomorphisme $f_{|F}$ de F. Soit $\mathcal{B}_F$ une base orthonormale de F. Par la proposition 6.3.1, $\mathrm{Mat}(f_{|F}, \mathcal{B})$ est de la forme R_θ.

Dans les deux cas, on applique l'hypothèse de récurrence à $f_{|F^{\perp}} : F^{\perp} \to F^{\perp}$ qui est trivialement orthogonal sur $F^{\perp}$. Soit alors $\mathcal{B}'$ une base orthonormale de $F^{\perp}$ telle que $\mathrm{Mat}(f_{|F^{\perp}}, \mathcal{B}')$ soit diagonale par blocs avec des blocs de la forme (1), (-1) et R_θ. Soit alors $\mathcal{B} = \mathcal{B}_F \cup \mathcal{B}'$. Cette famille est alors un base du fait de la somme directe $E = F \oplus F^{\perp}$. On montre alors facilement (exercice) que $\mathrm{Mat}(f, \mathcal{B})$ est de la forme requise. □

Corollaire 6.4.4. *Soit $A \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$. Alors il existe $P \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ telle que $P^{-1}AP$ soit diagonale par blocs* $\mathrm{Diag}(1, \ldots, 1, -1, \ldots, -1, R_{\theta_1}, \ldots, R_{\theta_p})$.

Démonstration. On munit $\mathbb{R}^n$ du produit scalaire canonique. Notons $\mathcal{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ tel que $\mathrm{Mat}(f, \mathcal{B}) = A$. Alors par la proposition 6.1.2, f est un endomorphisme orthogonal car sa matrice dans la base orthonormale $\mathcal{B}$ est orthogonale. Par la proposition précédente, il existe une base orthonormale $\mathcal{B}'$ de $\mathbb{R}^n$ telle que $\mathrm{Mat}(f, \mathcal{B}')$ ait la forme requise. Notons M cette matrice.

Soit alors P la matrice de passage $\mathrm{Pass}(\mathcal{B}, \mathcal{B}')$. Alors on a $P^{-1}AP = M$. Il reste à vérifier que $P \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$. La matrice P est la matrice de passage entre deux bases orthonormales (i.e. $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$) de $\mathbb{R}^n$. On conclut via la proposition 6.2.3 $\square$

7. Formes sesquilinéaires et hermitiennes

Dans ce chapitre, on définit des notions analogues aux formes bilinéaires, formes quadratiques, produits scalaires, etc, dans le cas complexe.

On dira à chaque paragraphe à quelle notion déjà vue correspond la notion traitée dans le paragraphe en question.

Les démonstrations étant quasi-identiques à celles de cas réel, ce chapitre n'en comporte aucune. On pourra se référer aux ouvrages cités pour les démonstrations.

7.1. **Introduction.**

Dans $\mathbb{R}^n$, la norme euclidienne $\|(x_1, \ldots, x_n)\| = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}$ provient du produit scalaire canonique $\langle , \rangle$; i.e. on a : $\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$.

Dans $\mathbb{C}^n$, on aimerait trouver un analogue du produit scalaire tel que la norme euclidienne $\|(x_1, \ldots, x_n)\|$ puisse s'écire à l'aide cet analogue.

La tentative de définir $s : \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ par $s(x, y) = \sum_{i=1}^n x_i y_i$ donne une forme bilinéaire. Malheureusement, l'application $x \mapsto \sqrt{s(x,x)}$ ne donne rien de concluant.

La bonne généralisation vient de l'observation que la valeur absolue d'un nombre réel a la propriété suivante : $|x| = \sqrt{x \cdot x}$ et le module d'un nombre complexe satisfait : $|z| = \sqrt{\overline{z} \cdot z}$.

Aussi il est naturel de considérer $s : \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \to C$ donné par $s(x, y) = \sum_{i_1}^n \overline{x_i} \cdot y_i$ (on aurait pu poser $s(x, y) = \sum_{i_1}^n x_i \cdot \overline{y_i}$).

Avec cette définition, nous avons la propriété voulue, à savoir $\|x\| = \sqrt{s(x,x)}$.

De plus, pour tout $x \in \mathbb{C}^n \smallsetminus \{0\}$, $s(x, x) > 0$ (donc d'une certaine manière, s a une propriété analogue aux formes bilinéaires symétriques qui sont définie-positives).

Cependant s n'est ni bilinéaire ni symétrique. En effet pour $x, y, z \in \mathbb{C}^n$ et pour $\lambda \in \mathbb{C}$, on a :

$s(x + y, z) = s(x, z) + s(y, z)$,
$s(x, y + z) = s(x, y) + s(x, z)$,
$s(x, \lambda \cdot y) = \lambda \cdot s(x, y)$,
mais $s(\lambda \cdot x, y) = \overline{\lambda} \cdot s(x, y)$;
et $s(x, y) = \overline{s(y, x)}$.

Définition 7.1.1. *Soient E et F deux $\mathbb{C}$-espaces vectoriels. Une application $f : E \to F$ est dite antilinéaire si pour $x, y \in E$ et pour $\lambda \in \mathbb{C}$,*

$$f(x + y) = f(x) + f(y) \text{ et } f(\lambda \cdot x) = \overline{\lambda} \cdot f(x).$$

En particulier on appelle forme antilinéaire sur E toute application antilinéaire de E vers $\mathbb{C}$. On note $\overline{E^\star}$ l'ensemble des formes antilinéaires sur E.

L'ensemble $\overline{E^\star}$ est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel.

7.2. **Généralités sur les formes sesquilinéaires sur $E \times F$.**

Analogue des formes bilinéaires sur un couple $E \times F$.

Soient E et F deux $\mathbb{C}$-espaces vectoriels.

Définition 7.2.1. *Une forme sesquilinéaire s sur $E \times F$ est une application $s : E \times F \to \mathbb{C}$ telle que pour $x, x' \in E$, pour $y, y' \in F$ et pour $\lambda \in \mathbb{C}$,*
- $s(x + x', y) = s(x, y) + s(x', y)$,
- $s(x, y + y') = s(x, y) + s(x, y')$,
- $s(x, \lambda y) = \lambda s(x, y)$,
- $s(\lambda x, y) = \overline{\lambda} s(x, y)$.

Voici une définition équivalente : une application $s : E \times F \to \mathbb{C}$ est une forme sesquilinéaire si pour tout $x \in E$, l'application $s(x, \cdot) : F \to \mathbb{C}$ appartient à $F^\star$ et pour tout $y \in F$, $s(\cdot, y) : E \to \mathbb{C}$ appartient à $E^{\overline{\star}}$.

Les applications linéaires δ et γ.

Étant donnée une forme sesquilinéaire s sur $E \times F$, on définit :

$$\begin{array}{rccc} \delta : & F & \to & E^{\overline{\star}} \\ & y & \mapsto & s(\cdot, y) \end{array}$$

et

$$\begin{array}{rccc} \gamma : & E & \to & F^{\overline{\star}} \\ & x & \mapsto & \overline{s(x, \cdot)}. \end{array}$$

On appelle ces applications les applications linéaires à droite et à gauche associées à s.

Lemme 7.2.2. *Les applications δ et γ sont linéaires.*

Définition 7.2.3.
- *On définit le rang de s comme étant le rang de δ.*
- *On dit que s est non dégénérée si δ et γ sont injectives.*
- *On définit le noyau de s :* $\ker(s) = \ker(\delta)$.

Ecriture matricielle (en dimension finie)

Ici on suppose que $\dim(E) = n$ et $\dim(F) = m$ son finies. Soient $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ et $\mathcal{C} = (f_1, \ldots, f_m)$ des bases respectives de E te F. On définit la matrice de s relativement aux bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$:

$$\mathrm{Mat}(s, \mathcal{B}, \mathcal{C}) = \begin{pmatrix} s(e_1, f_1) & \cdots & s(e_1, f_m) \\ \vdots & & \vdots \\ s(e_n, f_1) & \cdots & s(e_n, f_m) \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n \times m}(\mathbb{C}).$$

De plus si on note $S = \mathrm{Mat}(s, \mathcal{B}, \mathcal{C})$ et si $x \in E$ et $y \in F$ ont respectivement pour vecteurs coordonnées $X \in \mathbb{C}^n$ et $Y \in \mathbb{C}^m$ dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ alors nous avons la relation :

$$s(x, y) = {}^t\overline{X} \cdot S \cdot Y.$$

Enfin, nous avons :

Proposition 7.2.4.
- $\mathrm{rg}(s) = \mathrm{rg}(S)$
- $\ker(s) = \{y \in F \mid S \cdot Y = 0\}$
- *s est non dégénérée si et s. si S est inversible.*

7.3. **Généralités sur les formes sesquilinéaires sur E.** Ici on donne quelques généralités sur les formes sesquilinéaires $s : E \times F \to \mathbb{C}$ dans le cas où $F = E$.

Matrice et changement de base
Si E est de dimension finie et si $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ est une base de E alors on définit la matrice de s relativement à $\mathcal{B}$ en posant

$$\mathrm{Mat}(s, \mathcal{B}) = \begin{pmatrix} s(e_1, e_1) & \cdots & s(e_1, e_n) \\ \vdots & & \vdots \\ s(e_n, e_1) & \cdots & s(e_n, e_n) \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}).$$

Soit $\mathcal{B}'$ est une autre base de E. Notons $S = \mathrm{Mat}(s, \mathcal{B})$ et $S' = \mathrm{Mat}(s, \mathcal{B}')$. Notons $P = \mathrm{Passage}(\mathcal{B}, \mathcal{B}')$. Alors nous avons :

$$S' = {}^t\overline{P} \cdot S \cdot P.$$

En effet pour deux vecteurs x, y, notons respectivement $X, X' \in \mathbb{C}^n$ et $Y, Y' \in \mathbb{C}^n$ les vecteurs coordonnées dans $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$. On a : $PX' = X$ et $PY' = Y$ d'où $s(x, y) = {}^t\overline{X}SY = {}^t(\overline{PX'})SPY' = {}^t\overline{X'}({}^t\overline{P}SP)Y'$. D'un autre côté $s(x, y) = {}^t\overline{X'}S'Y'$, d'où l'égalité des matrices voulue.

Adjoint

Définition 7.3.1. *Soit u un endomorphisme de E. On dit que u admet un adjoint (relativement à s) s'il existe une endomorphisme u^* de E tel que*

$$\forall x, y \in E, \quad s(u(x), y) = s(x, u^*(y)).$$

Proposition 7.3.2. *Si E est de dimension finie et s est non dégénérée alors tout endomorphisme u admet un unique adjoint noté u^*.*
De plus si $\mathcal{B}$ est une base de E et si on note $S = \mathrm{Mat}(s, \mathcal{B})$, $U = \mathrm{Mat}(u, \mathcal{B})$ et $U^* = \mathrm{Mat}(u^*, \mathcal{B})$ alors

$$U^* = S^{-1} \cdot {}^t\overline{U} \cdot S.$$

7.4. **Forme (sesquilinéaire) hermitienne et forme quadratique hermitienne.**

Analogues des formes bilinéaires symétriques et des formes quadratiques.

Définition 7.4.1.
- *On appelle forme (sesquilinéaire) hermitienne sur E une forme sesquilinéaire $h : E \times E \to \mathbb{C}$ telle que*

$$\forall x, y \in E, \quad h(x, y) = \overline{h(y, x)}.$$

- *Une forme quadratique hermitienne est une application $q : E \to \mathbb{C}$ telle qu'il existe une forme hermitienne h sur E telle que*

$$\forall x \in E, \quad q(x) = h(x, x).$$

Dans le paragraphe 1 on a rencontré une forme quadratique hermitienne sur $\mathbb{C}^n$.

Remarque 7.4.2 (Importante)**.** *Une forme quadratique hermitienne est en fait à valeurs réelles.*
En effet pour $x \in E$, $q(x) = h(x, x) = \overline{h(x, x)}$ donc $q(x) \in \mathbb{R}$.

Définition 7.4.3. – *Étant donnée une forme quadratique hermitienne q sur E, l'application $h : E \times E \to \mathbb{C}$ donnée par*

$$h(x,y) = \frac{1}{4}(q(x+y) - q(x-y) - iq(x+iy) + iq(x-iy))$$

est une forme sesquilinéaire hermitienne appelée forme polaire hermitienne de q.
C'est l'unique forme hermitienne telle que $h(x,x) = q(x)$ pour tout $x \in E$.
– *On définit le rang, le noyau, la matrice relativement à une base, etc de q comme étant ceux de sa forme polaire hermitienne.*

Proposition 7.4.4. *Supposons que E soit de dimension finie. Soit $s : E \times E \to \mathbb{C}$ une forme sesquilinéaire. Alors les trois assertions suivantes sont équivalentes.*

(1) *s est hermitienne.*

(2) *Il existe une base $\mathcal{B}$ telle que $S = \mathrm{Mat}(s,\mathcal{B})$ satisfait ${}^t\overline{S} = S$.*

(3) *Pour toute base $\mathcal{B}$ de E la matrice $S = \mathrm{Mat}(s,\mathcal{B})$ satisfait ${}^t\overline{S} = S$.*

Définition 7.4.5. *Une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est dite hermitienne si ${}^t\overline{M} = M$.*

Cette notion est analogue à celle de matrice symétrique.

Remarque 7.4.6. *Une matrice symétrique réelle est une matrice hermitienne.*

Passage de h à q et vice-versa.
Soit $n = \dim(E)$ et soit $\mathcal{B} = (e_1,\dots,e_n)$ une base de E. Pour $x, y \in E$, notons $x_1,\dots,x_n \in \mathbb{C}$ et $y_1,\dots,y_n \in \mathbb{C}$ les coordonnées de x et y dans $\mathcal{B}$. Soit $H = \mathrm{Mat}(h,\mathcal{B})$ et notons $H = (h_{ij})$. Alors

$$q(x) = \sum_{1\le i,j\le n} h_{ij}\overline{x_i}x_j \qquad \text{et} \qquad h(x,y) = \sum_{1\le i,j\le n} h_{ij}\overline{x_i}y_j.$$

Le passage de q à h consiste à remplacer les x_j par y_j. Le passage de h à q consiste à remplacer y_j par x_j.

Bases orthogonales

L'espace vectoriel complexe E est supposé de dimension n. On fixe une forme quadratique hermitienne q et on note h sa forme polaire hermitienne.

Définition 7.4.7. – *Une base $(e_1,\dots,e_n)$ est dite orthogonale (relativement à q ou h) si pour tous $1 \le i \ne j \le n$, $h(e_i,e_j) = 0$.*
– *Une base $(e_1,\dots,e_n)$ est dite orthonormale (relativement à q ou h) si elle est orthogonale et de plus satisfait $h(e_i,e_i) = 1$ pour tout $i = 1,\dots,n$.*

Proposition 7.4.8. *Tout espace vectoriel complexe de dimension finie muni d'une forme hermitienne admet une base orthogonale.*

Proposition 7.4.9. *Soit $\mathcal{B}$ une base de E. Alors*

(1) *$\mathcal{B}$ est orthogonale si et s. si $\mathrm{Mat}(h,\mathcal{B})$ est diagonale. De plus dans ce cas la matrice est à coefficients réels.*

(2) *$\mathcal{B}$ est orthonormale si et s. si $\mathrm{Mat}(h,\mathcal{B})$ est la matrice identité.*

Orthogonalisation de Gauss

E est un espace vectoriel complexe de dimension n. Soit q une forme quadratique hermitienne dont on note h la forme polaire hermitienne. Soit $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base quelconque fixée de E. Pour $x \in E$, on note $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{C}$ ses coordonnées dans $\mathcal{B}$. On peut alors écrire

$$q(x) = \sum_{1 \leq i,j \leq n} h_{ij} \overline{x_i} x_j.$$

La première étape va consister à écrire

$$q(x) = c_1 |L_1(x)|^2 + \cdots c_r |L_r(x)|^2$$

avec $r \leq n$, $c_i \in \mathbb{R}$ et les L_i sont des formes linéaires qui sont linéairement indépendantes.

Pour le moment, supposons que cette première étape soit atteinte. On complète la famille des L_i en une base $L_1, \ldots, L_n$ de E^*. Soit alors $\mathcal{B}'$ l'unique base de E telle que la propriété suivante soit satisfaite : un vecteur x a pour coordonnées $x_1, \ldots, x_n$ dans $\mathcal{B}$ ssi il a pour coordonnées $L_1(x), \ldots, L_n(x)$ dans $\mathcal{B}'$.

Pour $x \in E$, notons $x'_i = L_i(x)$. Les x'_i sont donc les coordonnées de x dans la base $\mathcal{B}'$ et on a :

$$q(x) = c_1 \overline{x'_1} x_1 + \cdots c_r \overline{x'_r} x_r$$

Ainsi,

$$\mathrm{Mat}(q, \mathcal{B}') = \begin{pmatrix} c_1 & 0 & & & & 0 \\ 0 & \ddots & & & & \\ & & c_r & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 & & \\ & & & & \ddots & 0 \\ 0 & & \cdots & & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ainsi la base $\mathcal{B}'$ est orthogonale. De plus on obtient $\mathrm{rg}(q) = r$.

Voyons maintenant comment réaliser la première étape. Comme pour les formes quadratiques, on a deux cas à traiter et une récurrence sur le nombre de variables (ou de façon équivalente sur la dimension de l'espace).

Avant de commencer, rappelons que les h_{ij} sont les coefficients de la matrice $H = \mathrm{Mat}(q, \mathcal{B})$ et que cette dernière est hermitienne. Ainsi les h_{ij} satisfont

$$\forall 1 \leq i, j \leq n, \quad h_{ij} = \overline{h_{ji}}$$

donc en particulier

$$\forall i = 1, \ldots, n, \quad h_{ii} \in \mathbb{R}.$$

(1) Cas où l'un des h_{ii} est non nul.
Pour simplifier supposons que $h_{11} \neq 0$.
Rappelons que h_{11} est réel. On peut écrire

$$q(x) = h_{11} |x_1|^2 + \overline{x_1} L + x_1 \overline{L} + q'$$

où L est linéaire en $x_2, \ldots, x_n$ et q' est quadratique hermitienne en $x_2, \ldots, x_n$. Or

$$\begin{aligned} h_{11}|x_1 + \frac{L}{h_{11}}|^2 &= h_{11}(x_1 + \frac{L}{h_{11}})(\overline{x_1} + \frac{\overline{L}}{\overline{h_{11}}}) \\ &= h_{11}|x_1|^2 + x_1\overline{L} + \overline{x_1}L + \frac{L\overline{L}}{(h_{11})^2} \text{ car } h_{11} \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

On en déduit que

$$q(x) = h_{11}|x_1 + \frac{L}{h_{11}}|^2 + q''$$

où $q'' = q' - \dfrac{L\overline{L}}{(h_{11})^2}$.

La quantité $L\overline{L}$ est quadratique hermitienne en $x_2, \ldots, x_n$. Ainsi on a écrit $q(x)$ comme le carré du module d'une forme linéaire multiplié par le coefficient (réel) h_{11} plus q'' qui est quadratique hermitienne en $x_2, \ldots, x_n$.

(2) Cas où tous les h_{ii} sont nuls.
Ici, il existe donc un h_{ij} non nul avec $i \neq j$ (sinon q est nulle !). Pour simplifier on suppose h_{12} non nul. Notons que h_{12} n'a aucune raison d'être réel (contrairement à h_{11} dans le cas 1). On écrit

$$q(x) = h_{12}\overline{x_1}x_2 + \overline{h_{12}}x_1\overline{x_2} + x_1L + \overline{x_1}\overline{L} + x_2L' + \overline{x_2}\overline{L'} + q'$$

où L et L' sont linéaires en $x_3, \ldots, x_n$ q' est quadratique hermitienne en $x_3, \ldots, x_n$. Par suite,

$$\begin{aligned} q(x) &= (x_1 + \frac{\overline{L'}}{\overline{h_{12}}})(\overline{h_{12}}\overline{x_2} + L) + (\overline{x_1} + \frac{L'}{h_{12}})(h_{12}x_2 + \overline{L}) \\ &\quad + q' - \frac{1}{\overline{h_{12}}}L\overline{L'} - \frac{1}{h_{12}}\overline{L}L'. \end{aligned}$$

On utilise alors l'identité suivante :

$$a\overline{b} + \overline{a}b = \frac{1}{2}\big(|a+b|^2 - |a-b|^2\big)$$

et on obtient finalement

$$q(x) = \frac{1}{2}\big(|x_1 + h_{12}x_2 + \overline{L} + \frac{L'}{h_{12}}|^2 - |x_2 - h_{12}x_2 - \overline{L} + \frac{L'}{h_{12}}|^2\big) + q''$$

où

$$q'' = q' - \frac{1}{\overline{h_{12}}}L\overline{L'} - \frac{1}{h_{12}}\overline{L}L'$$

et q'' est quadratique hermitienne en $x_3, \ldots, x_n$.

À la suite de ces deux cas, on recommence le processus avec q'' qui comporte une ou deux variables de moins que q.

Réduction des formes quadratiques hermitiennes - Signature.

Théorème 7.4.10. *Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension n. Soit q une forme quadratique hermitienne sur E. Soient $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases orthogonales de E. Notons $H = (h_{ij}) = \mathrm{Mat}(q, \mathcal{B})$ et $H' = (h'_{ij}) = \mathrm{Mat}(q, \mathcal{B}')$. (Ces matrices sont diagonales réelles.) Notons s et t (resp. s' et t') le nombre de coefficients > 0 et < 0 de H*

(resp. H').
Alors $s = s'$ et $t = t'$ et de plus $\mathrm{rg}(q) = s + t$.

Grâce à ce théorème, on peut définir la signature de q.

Définition 7.4.11. *Le couple (s,t) du théorème précédent s'appelle signature de q. On la note* $\mathrm{sign}(q)$.

Théorème 7.4.12. *Étant donné q quadratique hermitienne sur E de dimension n, il existe une base $\mathcal{B}$ de E telle que*

$$\mathrm{Mat}(q, \mathcal{B}) = \begin{pmatrix} \mathrm{Id}_s & 0 & 0 \\ 0 & -\mathrm{Id}_t & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

où $(s,t) = \mathrm{sign}(q)$.

Ainsi dans une telle base, on a :

$$q(x) = |x_1|^2 + \cdots + |x_r|^2 - |x_{r+1}|^2 - \cdots - |x_n|^2.$$

Définition 7.4.13.
- *On dit que q est définie si*

$$\forall x \in E \setminus \{0\}, \quad q(x) \neq 0$$

- *On dit que q est positive (resp. négative) si*

$$\forall x \in E, \quad q(x) \geq 0 \ (\textit{resp. } q(x) \leq 0).$$

Ainsi "définie-positive" signifie que $q(x) > 0$ pour tout $x \neq 0$.

Définition 7.4.14.
- *On appelle produit scalaire hermitien toute forme hermitienne définie-positive.*
- *On appelle espace hermitien tout $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie muni d'un produit scalaire hermitien.*

Ces notions sont les analogues des produits scalaires et des espaces euclidiens.

Proposition 7.4.15. *Dans un espace hermitien il existe des bases orthonormales.*

Exemple 7.4.16. L'exemple type d'espace hermitien est $\mathbb{C}^n$ muni du produit scalaire hermitien suivant

$$\langle (x_1, \ldots, x_n), (y_1, \ldots, y_n) \rangle = \overline{x_1} \cdot y_1 + \cdots + \overline{x_n} \cdot y_n.$$

On rappelle qu'on "identifie" cette forme sesquilinéaire hermitienne avec sa forme quadratique hermitienne associée :

$$(x_1, \ldots, x_n) \mapsto |x_1|^2 + \cdots + |x_n|^2.$$

Dans ce cas, la base canonique de $\mathbb{C}^n$ est une base orthonormale.

Pour finir, si E est un espace vectoriel complexe (de dimension quelconque) muni d'un produit scalaire hermitien noté $\langle , \rangle$ alors E peut être muni d'une norme en posant $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$.
Dans l'exemple précédent (avec $E = \mathbb{C}^n$) la norme obtenue est :

$$\|(x_1, \ldots, x_n)\| = \sqrt{|x_1|^2 + \cdots + |x_n|^2}$$

c'est-à-dire la norme euclidienne de $\mathbb{C}^n$.

7.5. **Diagonalisation des matrices hermitiennes et forme hermitienne dans un espace hermitien.** Rappelons qu'une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est hermitienne si ${}^t\overline{M} = M$.

7.5.1. *Diagonalisations.*

Proposition 7.5.1. *Soit $(E, \langle,\rangle)$ un espace hermitien et f un endomorphisme de E. Alors on équivalence entre :*
- *f est auto-adjoint.*
- *Pour toute base orthonormale $\mathcal{B}$ de E, $\mathrm{Mat}(f, \mathcal{B})$ est hermitienne.*
- *Il existe une base orthonormale $\mathcal{B}$ de E telle que $\mathrm{Mat}(f, \mathcal{B})$ soit hermitienne.*

Théorème 7.5.2. *Soit f un endomorphisme auto-adjoint d'un espace hermitien $(E, \langle,\rangle)$. Alors :*
- *Les valeurs propres de f sont réelles.*
- *f est diagonalisable.*
- *Les sous-espaces propres de f sont orthogonaux deux à deux.*

Comme conséquence il existe une base orthonormale de E constituée de vecteurs propres de f.

Corollaire 7.5.3. *Soit H une matrice hermitienne. Alors ses valeurs propres sont dans $\mathbb{R}$. La matrice M est diagonalisable et ses sous-espaces propres sont deux à deux orthogonaux (dans $\mathbb{C}^n$ muni du produit scalaire hermitien canonique).*

7.5.2. *Forme quadratique hermitienne sur un espace hermitien.*

Théorème 7.5.4. *Soit q une forme quadratique hermitienne sur un espace hermitien $(E, \langle,\rangle)$. Alors il existe une base de E qui est à la fois orthonormale pour $\langle,\rangle$ et orthogonale pour q.*

Corollaire 7.5.5. *Soit H une matrice hermitienne. Alors il existe $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ inversible telle que $P^{-1}HP$ est diagonale réelle et ${}^t\overline{P} = P^{-1}$.*

Corollaire 7.5.6. *Soit q une forme quadratique hermitienne sur un espace vectoriel complexe E de dimension finie. Soit $\mathcal{B}$ une base quelconque de E et soit $H = \mathrm{Mat}(q, \mathcal{B})$.*
Notons s (resp. t) le nombre de valeurs propres > 0 (resp. < 0) de H. Alors

$$\mathrm{sign}(q) = (s, t).$$

7.6. **Matrices unitaires.** Les matrices unitaires sont <u>analogues</u> aux matrices orthogonales.

7.6.1. *Cas des endomorphismes.* Soit $(E, \langle,\rangle)$ un espace hermitien.

Définition 7.6.1. *Un endomorhpisme f de E est dit unitaire si*

$$\forall x, y \in E, \quad \langle f(x), f(y)\rangle = \langle x, y\rangle.$$

Cette notions est équivalente à :
- Pour tout $x \in E$, $\|f(x)\| = \|x\|$.
- Si $\mathcal{B}$ est une base orthonormale de E alors la matrice $M = \mathrm{Mat}(f, \mathcal{B})$ satisfait : ${}^t\overline{M} \cdot M = \mathrm{Id}_n$.
- f envoie toute base orthonormée sur une base orthonormée.

7.6.2. *Matrices unitaires.*

Définition 7.6.2. *Une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est dite unitaire si ${}^t\overline{M} \cdot M = \mathrm{Id}_n$. On note $U_n(\mathbb{C})$ l'ensemble des matrices unitaires de taille n.*

Remarque 7.6.3.
- *L'ensemble $U_n(\mathbb{C})$ est un sous-groupe de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$.*
- $\mathcal{O}_n(R) = U_n(\mathbb{C}) \cap \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Proposition 7.6.4. *Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Les assertions sont équivalentes.*
- *M est unitaire.*
- *M est la matrice de passage entre deux bases orthonormales d'un espace hermitien.*
- *Les vecteurs colonnes de M forment une base orthonormale de $\mathbb{C}^n$ muni de son produit scalaire hermitien canonique.*