Licence ST - Année 2009/2010 - Semestre 2
UE Mathématiques, Math IV Algèbre

Feuille n° 2

Formes bilinéaires

Exercice 1. Soient E, F deux $\mathbf{k}$-espaces vectoriels et $\sigma \in E^*$, $\tau \in F^*$. Montrer que l'application $b : E \times F \to \mathbf{k}$ définie par l'égalité $b(x, y) = \sigma(x)\tau(y)$ est une forme bilinéaire.

Exercice 2. Soit E le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des fonctions continues d'un intervalle $[a, b]$ vers $\mathbb{R}$. Pour $f, g \in E$ on pose

$$b(f, g) = \int_a^b f(t)g(t)dt.$$

Monter que b est une forme bilinéaire sur $E \times E$.

Exercice 3 (question de cours)**.** Soient E et F deux $\mathbf{k}$-espaces vectoriels de dimension finie. On pose $n = \dim E$ et $m = \dim F$. Soit b une forme bilinéaire sur $E \times F$. Soient $\mathcal{B}$ une base de E et $\mathcal{C}$ une base de F. On note B la matrice de b relativement aux bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$.

Pour $x \in E$ (resp. $y \in F$), on note X (resp. Y) le vecteur coordonnées relativement à la base $\mathcal{B}$ (resp. $\mathcal{C}$).

Montrer que $b(x, y) = {}^tX \cdot B \cdot Y$. Expliquer pourquoi cette égalité est un abus de notations ?

Exercice 4. En cours on a, à une forme bilinéaire $b : E \times F \to \mathbf{k}$, associé l'application à droite $\delta : F \to E^*$ donnée par $\delta(y) = b(\cdot, y)$.

- Montrer que l'application $\mathrm{Bil}_{\mathbf{k}}(E \times F) \to \mathrm{Hom}_{\mathbf{k}}(\mathrm{F}, \mathrm{E}^*)$ qui à b associe δ est un isomorphisme linéaire.
- Que peut-on en déduire sur $\dim \mathrm{Bil}_{\mathbf{k}}(E \times F)$? (si E et F sont de dimension finie).

Exercice 5. E étant un espace vectoriel de dimension finie, on se donne $b : E \times E^* \to \mathbf{k}$ par $b(x, \omega) = \omega(x)$ (on note aussi $\langle \omega, x \rangle$). Déterminer les applications linéaires à gauche et à droite associées : γ et δ. L'une de ces applications vous est-elle familière ?

Si $\mathcal{B}$ est une base de E, déterminer la matrice de b relativement aux bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}^*$.

Exercice 6. Soient E et F deux $\mathbb{R}$-espaces vectoriels de même dimension finie, et b une forme bilinéaire sur $E \times F$. On se donne une base $\mathcal{C}_0$ de F et une base $\mathcal{B}'_0$ de E^* et on suppose que l'application linéaire à droite δ a pour matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

relativement aux bases $\mathcal{C}_0$ et $\mathcal{B}'_0$.

1. Quel est le rang de b ?
2. Déterminer une base $\mathcal{C}$ de F et une base $\mathcal{B}'$ de E^* pour lesquelles la matrice de δ est diagonale.
3. En utilisant la question 2, déterminer une base de E et une base de F pour lesquelles b est diagonale.

Exercice 7. Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie n, $\mathcal{B}_0$ une base de E. Soit u un endomorphisme linéaire de E. On suppose que la matrice de u dans la base $\mathcal{B}_0$ est

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Soit $b : E^* \times E \to \mathbb{R}$ définie par $b(\omega, x) = \langle w, u(x) \rangle = \omega(u(x))$.

1. Vérifier que b est une forme bilinéaire.
2. Montrer que $\delta = \Phi \circ u$ où Φ est l'isomorphisme canonique de E vers E^{**}.
3. Déterminer une base $\mathcal{B}_1$ de E pour laquelle la matrice de u est diagonale.
4. En déduire une base $\mathcal{B}$ de E telle que la matrice de b relativement aux bases $\mathcal{B}^*$ et $\mathcal{B}$ est diagonale.

Exercice 8. Soient E et F deux $\mathbf{k}$-espaces vectoriels (pas nécessairement de dimension finie). Soit p un entier supérieur ou égal à 1. Soient $u_1, \dots, u_p \in E^*$ et $v_1, \dots, v_p \in F^*$. On définit une application $b : E \times F \to \mathbf{k}$ comme suit. Pour $x \in E$ et $y \in F$, on pose $b(x, y) = \sum_{i=1}^{p} u_i(x)v_i(y)$.

1. Montrer que b est bilinéaire.
2. Montrer que $\mathrm{Im}(\delta) \subseteq \mathrm{Vect}\{u_1, \dots, u_p\}$.
3. En déduire que : $\mathrm{rang}(b) \leq \dim \mathrm{Vect}\{u_1, \dots, u_p\} \leq p$.
4. De même, montrer que : $\mathrm{rang}(b) \leq \dim \mathrm{Vect}\{v_1, \dots, v_p\} \leq p$.
5. Déduire de ce qui précède l'implication suivante :

$$p = \mathrm{rang}(b) \Longrightarrow \text{les familles } u_1, \dots, u_p \text{ et } v_1, \dots, v_p \text{ sont libres.}$$

Réciproquement on suppose maintenant que les u_i et les v_i forment deux familles libres. Le but est de montrer que le rang de b est égal à p.

6. On suppose d'abord que $\dim E$ et $\dim F$ sont finies. On complète la famille des u_i en une base de E^* et on note $\mathcal{B}$ la base antéduale. De même on note $\mathcal{C}$ la base antéduale d'une base de F^* obtenue en complétant la famille des v_i.

   Déterminer la matrice de b relativement aux bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$. Conclure.
7. On suppose maintenant que E et F ne sont pas tous deux de dimension finie.
   (a) On considère l'application linéaire $\varphi : F \to \mathbf{k}^p$, $y \mapsto (v_1(y), \dots, v_p(y))$. Montrer que φ est surjective si et seulement si les v_i sont linéairement indépendants.

   Indication : Pour l'implication "$\Leftarrow$", raisonnez par l'absurde en considérant $\mathrm{ann}_{(\mathbf{k}^p)^*}(\mathrm{Im}(\varphi))$. En se plaçant dans une base appropriée, vous obtiendrez une combinaison linéaire nulle et non triviale des v_i contredisant la liberté de ceux-ci.

   (b) Utiliser la question précédente pour montrer que si les v_i sont linéairement indépendants alors $\mathrm{Im}(\delta) = \mathrm{Vect}\{u_1, \dots, u_p\}$.

   (c) Conclure.