L1 - UE TMB

Fiche TD n° 2 Groupes et algèbre linéaire

Exercice 1

Résoudre les trois systèmes de trois équations à trois inconnues suivants

$$\left\{ \begin{array}{l} -3x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 1 \\ -2x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ 7x_1 + 5x_2 - 4x_3 = 0 \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} -3x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 0 \\ -2x_1 - x_2 + x_3 = 2 \\ 7x_1 + 5x_2 - 4x_3 = -3 \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} -3x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 1 \\ -2x_1 - x_2 + x_3 = 1 \\ 7x_1 + 5x_2 - 4x_3 = 1 \end{array} \right.$$

On pourra remarquer les similarités entre les trois systèmes et essayer de les résoudre simultanément.

Soit la matrice

$$A = \begin{pmatrix} -3 & -2 & 2 \\ -2 & -1 & 1 \\ 7 & 5 & -4 \end{pmatrix}$$

Cette matrice est-elle inversible ? Si oui, quel est son inverse ? Quel est son déterminant ?

Exercice 2

Résoudre les deux systèmes de trois équations à trois inconnues suivants

$$\left\{ \begin{array}{l} 2x_1 + x_2 = 1 \\ -x_1 + x_3 = -1 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 0 \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} 2x_1 + x_2 = 2 \\ -x_1 + x_3 = -1 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 0 \end{array} \right.$$

Soit la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Cette matrice est-elle inversible ? Si oui, quel est son inverse ? Quel est son déterminant ?

On rappelle la définition suivante : un groupe est un ensemble G , muni d'une loi $*$ vérifiant les propriétés suivantes

- $x * (y * z) = (x * y) * z$ pour tous x, y, z dans G .
- Il existe un élément $e \in G$ vérifiant $e * x = x * e = x$ pour tout x dans G .
- Pour tout $x \in G$, il existe un élément y (l'inverse de x) vérifiant $x * y = y * x = e$.

Exercice 3

1. Voici une liste d'ensemble, munis d'une loi de composition. Dans quels cas obtient-on un groupe ?
 - $\mathbb{R}$, muni de la multiplication usuelle.
 - $\mathbb{R}^*$, muni de la multiplication usuelle.

- $\mathbb{R}_+^*$, muni de la multiplication usuelle.
- $\mathbb{R}$, muni de l'addition usuelle.
- $\mathbb{R}^*$, muni de l'addition usuelle.
- $\mathbb{R}_+^*$, muni de l'addition usuelle.
- $\mathbb{R}^3$, muni de l'addition usuelle.

2. Parmi les ensembles suivants, lesquels sont des sous-groupes de $(\mathbb{R}, +)$?

$$\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \{-1, 1\}, \{-1, 0, 1\}$$

Pouvez-vous donner un sous-groupe de $(\mathbb{Z}, +)$ qui ne soit pas trivial ?

3. Est-ce que l'ensemble $(\mathbb{R}^3, \wedge)$ est un groupe ? (ici $\wedge$ désigne le produit vectoriel).

Exercice 4

Soit $E = \{e_1, e_2\}$ un ensemble à deux éléments. Combien y a-t-il d'applications de $E \times E$ dans E ? Montrer que parmi ces applications, il n'y en a que 2 qui définissent sur E une loi de groupe ; appelons $*_1$ et $*_2$ ces deux lois de groupe. Montrer qu'il existe une application bijective $f : E \rightarrow E$ vérifiant la propriété

$$f(x *_1 y) = f(x) *_2 f(y)$$

pour tous x, y dans E . Dans cette situation, on dit que les groupes $(E, *_1)$ et $(E, *_2)$ sont isomorphes.

Exercice 5

Soit $\vec{a}$ un vecteur de $\mathbb{R}^3$. On considère l'application $T_{\vec{a}} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ définie par

$$T_{\vec{a}}(\vec{x}) = \vec{x} + \vec{a}.$$

1. Est-ce que $T_{\vec{a}}$ est une application linéaire ? Si oui, donner la matrice qui lui est associée. On dit que $T_{\vec{a}}$ est la translation de vecteur $\vec{a}$.
2. Est-ce que l'ensemble $E = \{T_{\vec{a}} : \vec{a} \in \mathbb{R}^3\}$, muni de la loi $\circ$ (la loi de composition des applications de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$) est un groupe ?
3. On note S l'ensemble des **itérés**¹ de $T_{\vec{a}}$, c'est-à-dire $S = \{id, T_{\vec{a}}, T_{\vec{a}} \circ T_{\vec{a}}, T_{\vec{a}} \circ T_{\vec{a}} \circ T_{\vec{a}}, \dots\}$. Est-ce que S est un sous-groupe de $(E, \circ)$?
4. On note S' l'ensemble des itérés de $T_{-\vec{a}}$. Est-ce que $S \cup S'$ est un sous-groupe de $(E, \circ)$? Si oui, à quel groupe connu est-il isomorphe ?

Exercice 6 *

On note C le cercle de centre $(0, 0)$ et de rayon 1 dans $\mathbb{R}^2$. Pour tout $\varphi \in \mathbb{R}$, on note R_φ la rotation de centre $(0, 0)$ et d'angle φ . On remarque que $R_\varphi(C) = C$.

1. Est-ce que l'ensemble $E = \{R_\varphi : \varphi \in \mathbb{R}\}$, muni de la loi $\circ$ (loi de composition) est un groupe ?
2. On fixe $\varphi \in \mathbb{R}$. On note S l'ensemble des itérés de R_φ et S' l'ensemble des itérés de $R_{-\varphi}$. Est-ce que $S \cup S'$ est un sous-groupe de $(E, \circ)$? (*) Est-ce que S est un sous-groupe de $(E, \circ)$?² Dans chaque cas, préciser à quel groupe connu il est isomorphe.

1. On écrit parfois T^n pour désigner l'application obtenue en composant T avec elle-même n fois. Dans ce cas on prend la convention $T^0 = id$.

2. Indication : on pourra commencer par traiter le cas où $\varphi = 2\pi/n$ pour un entier $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 7 *

On note $X = \{1, 2, 3\}$ et E l'ensemble des applications de X dans X .

1. Combien d'éléments contient l'ensemble E ?
2. Est-ce que E , muni de la loi $\circ$ (loi de composition) est un groupe ?
3. On note $T = \{t_{12}, t_{13}, t_{23}\}$ l'ensemble des "transpositions" de X . L'application t_{ij} est définie par $t_{ij}(i) = j$, $t_{ij}(j) = i$ et $t_{ij}(k) = k$ si k est différent de i et de j . Est-ce que $(T, \circ)$ est un groupe ?
4. Est-ce que $(T \cup \{id\}, \circ)$ est un groupe ?
5. Déterminer un sous-ensemble S de E , tel que S contienne T et tel que $(S, \circ)$ soit un groupe.

On rappelle la définition suivante : un espace vectoriel V est un ensemble muni d'une loi $+$ telle que $(V, +)$ soit un groupe commutatif, et d'une autre loi $\cdot$ définie sur $\mathbb{R} \times V$ et à valeurs dans V , vérifiant les propriétés

- $1 \cdot u = u$,
 - $\lambda \cdot (u + v) = \lambda \cdot u + \lambda \cdot v$,
 - $(\lambda + \mu) \cdot u = \lambda \cdot u + \mu \cdot u$,
 - $(\lambda \cdot \mu) \cdot u = \lambda \cdot (\mu \cdot u)$
- pour tous λ, μ dans $\mathbb{R}$ et pour tous u, v dans V .

Exercice 8 *

On note P l'ensemble des polynômes, c'est-à-dire des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ de la forme

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x_1 + a_0$$

pour un entier $n \in \mathbb{N}$ et $a_0, a_1, \dots, a_n$ des nombres réels.

1. Est-ce que P est un espace vectoriel ? (si oui, on précisera quelles sont les deux lois).
2. On note P_2 l'ensemble des polynômes de degré inférieur ou égal à 2, c'est-à-dire de la forme $a_2 x^2 + a_1 x + a_0$. Est-ce que P_2 est un sous-espace vectoriel de P ?
3. On note P'_2 l'ensemble des polynômes de degré égal à 2, c'est-à-dire de la forme $a_2 x^2 + a_1 x + a_0$ avec $a_2 \neq 0$. Est-ce que P'_2 est un sous-espace vectoriel de P ?
4. Soit T l'application de P dans P donnée par la multiplication par x^2 , c'est à dire $T(f)$ est la fonction qui à x associe $x^2 f(x)$. Est-ce que T est une application linéaire ? Est-ce que T est une application de P_2 dans P_2 ?