Université Claude-Bernard Lyon 1

L1 - UE TMB

Fiche TD n° 3
Nombres complexes et fonctions circulaires

Nombres complexes et équations :

Exercice 1
Simplifier les nombres complexes suivant et les mettre sous la forme $x+iy$:

a) $(1+3i)\overline{(7-i)}$

b) $\frac{9+2i}{3-2i}$

c) $\frac{1+i\sqrt{3}}{\sqrt{3}+i}$

d) $\frac{\sqrt{7}+5i}{2\sqrt{7}-2i}+\frac{2\sqrt{7}-2i}{\sqrt{7}+5i}$

e) $\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{3}}\,\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{4}}$.

Exercice 2
Mettre les nombres complexes suivant sous la forme trigonométrique :

a) $1+i$

b) $\sqrt{3}+i$

c) $\frac{\sqrt{3}+i}{1+i}$

d) $\frac{1+i\sqrt{3}}{\sqrt{3}+i}$

e) $\frac{5+11i\sqrt{3}}{7-4i\sqrt{3}}$.

Exercice 3

1. *Calculer les nombres complexes suivants en fonction de $n\in\mathbb{N}$, et les mettre sous la forme algébrique :*

   a) $(\frac{1+i\sqrt{3}}{\sqrt{3}+i})^n$

   b) $(\frac{5+11i\sqrt{3}}{7-4i\sqrt{3}})^n$.

2. ** Calculer de deux manières différentes $(1+i)^n$ en fonction de $n\in\mathbb{N}$. En déduire la formule*

$$\cos(n\frac{\pi}{4})=\frac{1}{\sqrt{2}^n}\sum_{k=0}^{E(n/2)}\binom{n}{2k}(-1)^k.$$

Exercice 4
Résoudre dans $\mathbb{C}$:

a) $z^5-z=0$

b) $(1+i\sqrt{3})z^4-3=0$

c) *** $(z+i)^n=(z-i)^n$ $(n\geq 2)$.

Exercice 5
Le but de cet exercice est de résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation

$$z^3-(6-i)z^2+(13-i)z-10-2i=0. \qquad (*)$$

1. *En sachant qu'elle existe trouver la solution réelle z_0 de $(*)$*
2. *Déterminer $a,b\in\mathbb{C}$ tels que pour tout $z\in\mathbb{C}$,*

$$z^3-(6-i)z^2+(13-i)z-10-2i=(z-z_0)(z^2+az+b).$$

3. *Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $(*)$*

Nombre complexes et géométrie :

Exercice 6
Déterminer et dessiner l'ensemble des $z \in \mathbb{C}$ tels que :

a) $|(1-i)z-3i| = 3$ *c)* $\Re\mathrm{e}(1-z) \leq \frac{1}{2}$ *e)* $|\frac{z-5}{z-3}| = 1.$
b) $|1-z| \leq \frac{1}{2}$ *d)* $\Re\mathrm{e}(iz) \leq \frac{1}{2}$

Exercice 7
On identifie $\mathbb{C}$ au plan $\mathbb{R}^2$ en associant à $z = x+iy \in \mathbb{C}$ le vecteur $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$.

1. *En utilisant l'exercice 8 de la fiche 1 montrer que la multiplication par un complexe de module 1, $\mathrm{e}^{i\phi}$ dans $\mathbb{C}$ correspond à la rotation R_ϕ dans $\mathbb{R}^2$. Faire un dessin en prenant des valeurs de votre choix.*
2. *A quoi correspond la multiplication par un complexe $r\,\mathrm{e}^{i\phi}$? Faire un dessin en prenant des valeurs de votre choix.*
3. *Soient trois points $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$ formant un triangle non plat. Quel est l'angle du triangle en z_1 ? Si $z \in \mathbb{C}^*$, que peut-on dire du triangle image du précédent par la multiplication par z ? Faire un dessin en prenant des valeurs de votre choix.*

Exercice 8

1. *Vérifier si les fonctions suivantes sont holomorphes sur $\mathbb{C}$:*

   a) $f(x_1+ix_2) = x_1+x_2+2i(x_1+x_2)$ *b)* $g(z) = (3+i)z^2 - 2i.$

2. ** Vérifier qu'une application linéaire sur $\mathbb{R}^2$ est holomorphe sur $\mathbb{C}$ si elle est $\mathbb{C}$-linéaire.*

Exercice 9
On identifie $\mathbb{C}$ au plan $\mathbb{R}^2$ en associant à $z = x+iy \in \mathbb{C}$ le vecteur $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$.

1. *Montrer que le produit scalaire de deux vecteurs $\overrightarrow{a}$ et $\overrightarrow{b}$ représentés dans $\mathbb{C}$ respectivement par z_1 et z_2 est donné par*
$$z_1 \cdot z_2 = \Re\mathrm{e}(\overline{z_1} z_2) = \Re\mathrm{e}(z_1 \overline{z_2}).$$
2. ** On "complète" $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^3$ en rajoutant le vecteur $\overrightarrow{e_3}$. Montrer que*
$$\overrightarrow{a} \wedge \overrightarrow{b} = \varepsilon \Im\mathrm{m}(\overline{z_1} z_2)\overrightarrow{e_3}$$
   où $\varepsilon = \pm 1$ est donné par la règle des trois doigts.

Nombres complexes et fonctions circulaires :

Exercice 10

1. *Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Exprimer* $\sin(2\alpha)$ *et* $\cos(2\alpha)$ *en fonction de* $\cos(\alpha)$ *et* $\sin(\alpha)$.
2. *Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Exprimer* $\sin(3\alpha)$ *et* $\cos(3\alpha)$ *en fonction de* $\cos(\alpha)$ *et* $\sin(\alpha)$.
3. *Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Montrer que* $\cos(\frac{\pi}{2} - \alpha) = \sin(\alpha)$.

Exercice 11

1. *Soit* $\alpha \in \mathbb{R}$. *Exprimer* $\cos(5\alpha)$ *en fonction de* $\cos(\alpha)$.
2. *En déduire que* $\cos(\frac{\pi}{10})$ *est solution de*

$$16x^4 - 20x^2 + 5 = 0.$$

3. *Calculer* $\cos^2(\frac{\pi}{10})$.
4. *En déduire que* $\cos(\frac{\pi}{5}) = \dfrac{1+\sqrt{5}}{4}$.

Exercice 12

Calculer les sommes suivantes pour $\theta \in \mathbb{R}$ *et* $n \in \mathbb{N}$ *:*

a) $C_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \cos(k\theta)$, $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \sin(k\theta)$.

b) $C'_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cos(k\theta)$, $S'_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \sin(k\theta)$.