

**L1 - UE TMB**

**Fiche TD n° 6  
Primitives et intégrales**

**Exercice 1** *Changement de variable relativement simple :*

$$\begin{array}{lll} \int_0^2 \sqrt{1+x} \, dx & \int \frac{1}{\sqrt{5x-2}} \, dx & \int \frac{x}{\sqrt{x^2-1}} \, dx \\ \int_{-1}^1 x^2 \exp(x^3) \, dx & \int \frac{1}{\sqrt{2-x^2}} \, dx & \int \frac{(\ln(x))^p}{x} \, dx \\ \int_{-1}^1 x \exp(1+x^2) \, dx & \int x \exp(1+x^2) \, dx & \int \frac{\cos(\ln(x))}{x} \, dx \\ \int_0^1 \frac{1}{(2x+1)^3} \, dx & \int \frac{x}{3x^2+1} \, dx & \int \frac{x}{(x+1)^2} \, dx \\ \int_{\frac{1}{2}}^0 \frac{2x+3}{2x+1} \, dx & \int \tan(x) \, dx & \int \frac{1+\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1} \, dx \end{array}$$

**Exercice 2** *Intégration par parties :*

$$\begin{array}{lll} \int x \ln(x) \, dx & \int x \sin(x) \, dx & \int \arcsin(x) \, dx \\ \int \arctan(x) \, dx & \int_0^1 x \arctan^2(x) \, dx & \int \frac{x}{\cos^2(x)} \, dx \end{array}$$

**Exercice 3** *Et puis... (parties et chgt de var)*

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2} \, dx$$

**Exercice 4** *Justifier l'existence et calculer :*

$$\begin{array}{ll} \int \frac{\sin(x) + \cos(x)}{3 + \sin(2x)} \, dx & (u := \sin x - \cos x. \text{ Calculer } u^2) \\ \int \frac{\sqrt{a-x}}{\sqrt{x}} \, dx & (a > 0, x = a \sin^2(u)) \\ \int \frac{x^2-1}{(x^2+1)^2} \ln(x) \, dx & (x = \tan(u)) \\ \int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{a^2-x^3}} \, dx & (a > 0, u = x^{\frac{3}{2}}) \\ \int x^2 \ln(x^6-1) \, dx & (u = x^3) \end{array}$$

**Exercice 5** Pour tout entier  $n$  on pose  $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(x) dx$

1. Calculez  $I_0$  et  $I_1$

2. Montrez que l'on a pour tout entier  $n \geq 2$  :

$$I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}$$

3. En déduire les valeurs de  $I_{2n}$  et  $I_{2n+1}$  pour tout  $n$ .

**Exercice 6** \* Polynômes en  $\sin x$  et  $\cos x$  :

$$\begin{array}{lll} \int \cos^4(x) \sin^2(x) dx & \int \cos^4(x) dx & \int \sin^4(x) dx \\ \int \cos^4(x) \sin^3(x) dx & \int \cos^3(x) \sin^5(x) dx & \end{array}$$

**Exercice 7** \* Fractions rationnelles en  $\sin x$  et  $\cos x$  :

$$\begin{array}{ll} \int \frac{1}{\cos^4(x)} dx & \int \frac{\cos(x)}{\sin^2(x) + 1} dx \\ \int \frac{\sin^5(x)}{\cos(x)} dx & \int \frac{1}{1 + \sin(x) + \cos(x)} dx \end{array}$$

**Exercice 8** Fractions contenant un radical :

$$\begin{array}{lll} \int \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2} dx & \int \frac{x^2}{\sqrt{a^2+x^2}} dx & \int \frac{1}{x + \sqrt{x^2-1}} dx \\ \int \frac{2x+3}{\sqrt{9x^2+6x+4}} dx & \int x\sqrt{2ax-x^2} dx & \end{array}$$

**Exercice 9** Éléments simples :

$$\begin{array}{lll} \int \frac{1}{x^2+4x+6} dx & \int \frac{2x+1}{x^2+4x+6} dx & \int \frac{1}{(x^2+x+1)^2} dx \\ \int \frac{3x+5}{(x^2+x+1)^2} dx & \int \frac{5x+2}{x^2+4x+6} dx & \int \frac{6x-1}{(x^2+4x+7)^2} dx \\ \int \frac{x^2(4x^3+x^2+4x-1)}{(x^2-1)(x^2+1)^2} dx & \int \frac{\operatorname{ch}(x)}{\operatorname{ch}^2(x) + \operatorname{sh}(x)} dx & \end{array}$$